LÓGICA TRABAJO GUIADO, CURSO 2023/2024

1. En una isla remota hay dos tribus, la tribu V de las personas veraces (siempre dicen la verdad) y la tribu M de las personas mentirosas (que siempre mienten).

   Consideremos los predicados:
   $V(x) \equiv$ `x es de la tribu V, personas que siempre dicen la verdad`,
   $M(x) \equiv$ `x es de la tribu M, personas que siempre mienten`
   Una persona viajera se desplaza a la isla y se encuentra con dos habitantes de la isla a y b. Estudia, en cada una de las siguientes situaciones, a qué tribu pertenecen a y b:

   (i) a dice: Si yo digo la verdad y b miente, entonces 2+3=6.
   En este caso a dice: E_1: $V(\mathrm{a}) \wedge M(\mathrm{b}) \Longrightarrow 2+3=6$; $M(\mathrm{a}) \vee V(\mathrm{b}) \vee False$
   Por lo tanto, o a miente o b dice la verdad.

   (ii) a dice: Si yo digo la verdad, entonces **o** yo **o** b somos mentirosas.
   a dice: E_1: $V(\mathrm{a}) \Longrightarrow (M(\mathrm{a}) \veebar M(\mathrm{b}))$; $M(\mathrm{a}) \vee (M(\mathrm{a}) \veebar M(\mathrm{b}))$; $M(\mathrm{a}) \vee (M(\mathrm{a}) \wedge V(\mathrm{b})) \vee (V(\mathrm{a}) \wedge M(\mathrm{b}))$; $M(\mathrm{a}) \vee (V(\mathrm{a}) \wedge M(\mathrm{b}))$
   Por lo tanto, si a es mentiroso, da igual lo que sea b, y si a dice la verdad, b es mentiroso.

   (iii) a dice: Si **o** yo **o** b somos mentirosas, entonces yo miento.
   a dice: E_1: $(M(\mathrm{a}) \veebar M(\mathrm{b})) \Longrightarrow M(\mathrm{a})$; $(M(\mathrm{a}) \veebar M(\mathrm{b}))' \vee M(\mathrm{a})$;
   $((V(\mathrm{a}) \vee M(\mathrm{b})) \wedge (M(\mathrm{a}) \vee V(\mathrm{b}))) \vee M(\mathrm{a})$;
   $(V(\mathrm{a}) \wedge M(\mathrm{a})) \vee (V(\mathrm{a}) \wedge V(\mathrm{b})) \vee (M(\mathrm{b}) \wedge M(\mathrm{a})) \vee (M(\mathrm{b}) \wedge V(\mathrm{b})) \vee M(\mathrm{a})$;
   $M(\mathrm{a}) \vee (V(\mathrm{a}) \wedge V(\mathrm{b}))$
   Esto es: si a es mentiroso, da igual lo que sea b, y si a dice la verdad, b también dice la verdad.

2. Considérense las siguientes sentencias, donde por naturales entendemos los elementos de $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ y $\mathcal{U}$ es un conjunto no vacío:

   E_1: Entre dos naturales múltiplos de 10 distintos, existe otro natural impar estrictamente comprendido entre ellos que es múltiplo de 7

   E_2: $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U},\ \exists\, Z \subseteq \mathcal{U} \ /\ X \neq Y \implies X \subseteq Z \ \wedge\ Z \subseteq X \cup Y$

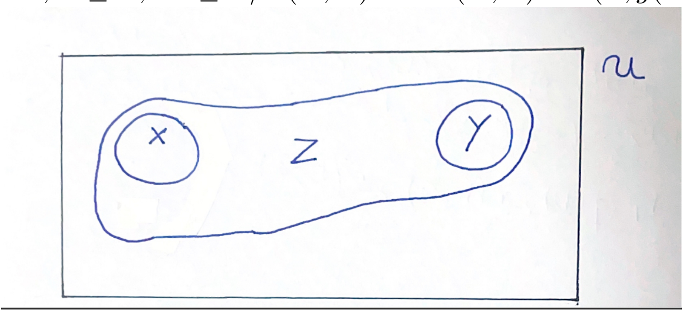
   se pide:

   (a) Formalizar y discutir la verdad de E_1.
   Predicados:
   M(A,B) = "A es menor que B"
   D(A,B) = "B es divisor de A"
   I(A,B) = "A es igual a B"

   $\forall X, Y \in \mathbb{N}^*$, $\exists Z \in \mathbb{N}^* / D(10,x) \wedge D(10,y) \wedge I'(x,y) \wedge D'(z,2) \wedge D(7,z) \wedge M(x,z) \wedge M(z,y) \vee (M(y,z) \wedge M(z,x))$

   No es veraz porque si tomamos el rango que hay entre 10 y 20 vemos un contraejemplo, ya que el número 14 no es impar pero si es divisor de 7 y está entre dos divisores de 10.

(b) Formalizar y discutir la verdad de E_2. En caso de ser verdadera, razonar si el conjunto Z es único.
$\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}, \exists Z \subseteq \mathcal{U} / I'(X,Y) => C(X,Z) \wedge C(Z, g(X,Y))$



En este ejemplo podemos observar como dentro del conjunto $\mathcal{U}$ encontramos los tres subconjuntos X, Y, Z. Se cumplen todas las caracterìsticas enunciadas, donde $X \neq Y$, $X \subseteq Z$ y tambien $Z \subseteq X \cup Y$ ya que la unión entre X e Y no existe.
El conjunto Z no es único ya que podrá estar formado por cuales quiera valores siempre y cuando X e Y no compartan elementos de su subconjunto

(c) Dar la negación de E_1 y E_2, y discutir su verdad.
E_1: $\exists X, Y \in \mathbb{N}^* / \forall Z \in \mathbb{N}^*, D'(10,x) \vee D'(10,y) \vee I(10,y) \vee D(z,2) \vee D'(7,z) \vee M'(x,z) \vee M'(z,y) \wedge (M'(y,z) \vee M'(z,x))$
Los números 27, 28 y 29 no hacen veraz este enuncaciado ya que ni el 27 ni 29 son divisores de 10 y el numero 28 es par pero a su vez es divisor de 7, por lo que el enunciado queda anulado.

E_2: $\exists X, Y \in \mathcal{U} / \forall Z \in \mathcal{U}, I(X,Y) => C'(X,Z) \wedge C'(Z, g(X,Y)$

NOTA: $a \in \mathbb{N}$ está estrictamente comprendido entre $b, c \in \mathbb{N}$, $b < c$, si $b < a < c$.

3. Encuentra la forma clausulada de la siguiente expresión de la lógica de predicados, detallando cada uno de los pasos que conduzcan a ella:

$$\left[\forall x, \exists y, z /\ P'(x,a) \Rightarrow Q'(y, f(a)) \wedge R(z)\right]' \wedge \left[\forall x, \exists y /\ P(b,x) \vee R'(a) \Rightarrow Q(x, f(y))\right]$$

En la expresión anterior $P(\ ,\ )$, $Q(\ ,\ )$ y $R(\ )$ son predicados, a y b constantes, y f una función.

1.Eliminación de condicionales.

$$\left[\forall x, \exists y, z /\ P(x,a) \vee Q'(y, f(a)) \wedge R(z)\right]' \wedge \left[\forall x, \exists y /\ P(b,x) \vee R(a) \vee Q(x, f(y))\right]$$

2.Eliminación de negaciones genéricas.

$$\left[\forall x, \exists y, z /\ P'(x,a) \wedge Q(y, f(a)) \vee R'(z)\right] \wedge \left[\forall x, \exists y /\ P(b,x) \vee R(a) \vee Q(x, f(y))\right]$$

3.Independización de las variables cuantificadas.
(Segunda x = t. Segunda y = u.)

$$\left[\forall x, \exists y, z /\ P'(x,a) \wedge Q(y, f(a)) \vee R'(z)\right] \wedge \left[\forall t, \exists u /\ P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t, f(u))\right]$$

4.Eliminación de cuantificadores existenciales.
(La variable x está afectada por las variables y,z. Por lo que x = g(y,z))

$$\left[\forall y, z /\ P'(g(y,z),a) \wedge Q(y, f(a)) \vee R'(z)\right] \wedge \left[\forall t, \exists u /\ P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t, f(u))\right]$$

(La variable u está afectada por la variable t. Por lo que u = h(t)

$$\left[\forall y, z /\ P'(g(y,z),a) \wedge Q(y, f(a)) \vee R'(z)\right] \wedge \left[\forall t / P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t, f(h(t))\right]$$

5.Eliminación de cuantificadores universales.

6.Propiedad distributiva.

$$\big[\,(P'(g(y,z),a) \vee R'(z)) \wedge (Q(y,f(a)) \vee R'(z))\big] \;\wedge\; [P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t,f(h(t))]$$

7.Redenominación de las variables.

$$(P'(g(y,z),a) \vee R'(z)) \wedge (Q(k,f(a)) \vee R'(u)) \;\wedge\; (P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t,f(h(t)))$$

Clausulas:
$C_1 : P'(g(y,z),a) \vee R'(z)$
$C_2 : Q(k,f(a)) \vee R'(u)$
$C_3 : P(b,t) \vee R(a) \vee Q(t,f(h(t))$

4. Para las cláusulas
$$\begin{array}{rcll} C_1 & = & P(x,y,a) \vee P(f(z),b,z) & = L_1 \vee L_2 \\ C_2 & = & P'(f(b),t,a) \vee P'(f(u),b,a) & = M_1 \vee M_2 \end{array}$$
en las que P es un predicado, x,y,z,t,u variables, a,b constantes y f es una función, se pide:
   (a) Calcular todas las resolventes que se obtengan de $C_1 \wedge C_2$, detallando las fórmulas unificables que conduzcan a las mismas.
   (b) Si tomamos ahora $L_2 = P(x,b,z)$, justificar si se puede deducir, por resolución, la cláusula vacía.

5. Para los siguientes razonamientos de la lógica de predicados:

   (i) *Anacleto es un corrupto. Cuando alguien es un corrupto, su jefe también lo es. Todo el mundo respeta a su jefe. Por tanto, algún corrupto es respetado por alguien.*

   (ii) *Cualquier que sea más popular que su manager es futbolista. Antonia trabaja con Daniela. Quien quiera que trabaje con Daniela es más popular que la manager de Antonia. Por tanto, Antonia es futbolista.*

   (a) Formalízalo con los predicados, funciones y cuantificadores necesarios.
   (i)
   Anacleto
   Predicados:
   C(x): x es un corrupto
   J(x, y): x es jefe de y
   R(x,y): x es respetado por y

   P_1: C(Anacleto)
   P_2: $\forall x$(C(x) $\Rightarrow C(J(x,y)))$
   P_3: $\forall x, \forall y$ (R(y,J(x,y))
   G_1: $\exists x, \exists y(C(x) \wedge R(y,x))$
   (ii)
   Daniela
   Antonia
   R(x,y): x es más famosa que y
   F(x): x es futbolista
   T(x,y): x trabaja con y
   M(x): x es manager

   P_1: $\forall x(\exists y(M(x,y)) \wedge R(x,y) \Rightarrow F(x)$
   P_2: T(Antonia, Daniela)
   P_3: $\forall x$(T(x,Daniela) $\Rightarrow R(x, M(Antonia)))$
   G_1: $F(Antonia)$

(b) Expresa en forma clausulada las premisas y la negación de la conclusión.
(i)
C_1: C(Anacleto)
C_2: $C'(x) \vee C(J(x,y)))$
C_3: R(y,J(x,y))
$G_1 : C'(x) \vee R'(y,x)$
(ii)
$C_1 : M(x,y)$
$C_2 : R'(x,y) \vee F(x)$
$C_3 : T'(x, Daniela) \vee R(x, M(Antonia))$
$G_1 : F'(Antonia)$

(c) Razona, usando resolución por refutación, que es un razonamiento formalmente válido.
(i)
$C_1 \wedge G_1 = R_1$ $C_3 \wedge R_1 = \{\}$
Es un razonamiento formalmente válido ya que gracias a la resolución por refutación alcanzamos una claúsula vacía.
(ii)
$G_1 \wedge C_2 = R_1$
$C_2 \wedge R_1 = \{\}$
Es un razonamiento formalmente válido ya que gracias a la resolución por refutación alcanzamos una claúsula vacía.

6. Considérese el programa lógico definido (donde p, q, r son predicados, a, b constantes e y, z, u variables):

$$\mathcal{P} = \begin{cases} C_1 : p(y) & \leftarrow \\ C_2 : q(b,z) & \leftarrow \quad p(z) \\ C_3 : r(u,a) & \leftarrow \quad q(u,a) \end{cases}$$

(a) Obtén el Universo de Herbrand $\mathcal{U}$ y la base de Herbrand $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{U} = \{\text{a,b}\}$
$\mathcal{B} = \{p(\text{a}), p(\text{b}), q(\text{a,a}), q(\text{a,b}), q(\text{b,a}), q(\text{b,b}), r(\text{a,a}), r(\text{a,b}), r(\text{b,a}), r(\text{b,b})\}$

(b) Obtén razonadamente el modelo mínimo de Herbrand $\mathcal{I}_0$ de $\mathcal{P}$.
$\mathcal{I}_0 = \{p(\text{a}), p(\text{b}), q(\text{b,a}), q(\text{b,b}), r(\text{b,a})\}$

(c) Obtén, si es posible, un modelo de Herbrand con 3 elementos y otro con 7 elementos.
Como el modelo mínimo de Herbrand tiene 5 elementos, no es posible encontrar uno con menos elementos.
$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_0 \cup \{r(\text{a,a}), r(\text{b,b})\}$

(d) Discute detalladamente si las siguientes fórmulas pueden obtenerse a partir de $\mathcal{P}$ por SLD-resolución:

i. $A = \forall x \ / \ p(x)$
No se puede obtener a partir de $\mathcal{P}$ por SLD-resolución, ya que la variable debe estar cuantificada existencialmente.

ii. $B = \exists x \ / \ q'(a,x)$,
Tampoco se puede obtener por $\mathcal{P}$ por SLD-resolución, ya que su predicado es negativo.

iii. $C = \exists x \ / \ r(x,a)$
$G = C' = r'(x,a) = \leftarrow r(x,a)$

$$\mathcal{P} + \mathcal{G} = \begin{cases} G : & \leftarrow \quad r(x,a) \\ C_1 : p(y) & \leftarrow \\ C_2 : q(b,z) & \leftarrow \quad p(z) \\ C_3 : r(u,a) & \leftarrow \quad q(u,a) \end{cases}$$

$s1 = \{u|x\}, G \wedge C3 \Longrightarrow G1$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G1: & \leftarrow & q(u,a) \\ C_1: p(y) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,z) & \leftarrow & p(z) \end{cases}$$

$s2 = \{b|u, a|z\}, G1 \wedge C2 \Longrightarrow G2$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G2: & \leftarrow & p(a) \\ C_1: p(y) & \leftarrow & \end{cases}$$

$s3 = \{a|y\}, G2 \wedge C1 \Longrightarrow G3 = \square$
C se deduce de $\mathcal{P}$ para x = u.

iv. $D = \exists x \ / \ r(x,b)$
$G = D' = r'(x,b) = \leftarrow r(x,b)$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G: & \leftarrow & r(x,b) \\ C_1: p(y) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,z) & \leftarrow & p(z) \\ C_3: r(u,a) & \leftarrow & q(u,a) \end{cases}$$

No se puede deducir D de $\mathcal{P}$, ya que no se puede sustituir b por a, al ser dos constantes. Por consiguiente, no se puede operar hasta llegar a la cláusula vacía.

v. $E = \exists x \ / \ p(x) \wedge r(b,x)$
$G = E' = p'(x) \vee r'(b,x) = \leftarrow p(x), r(b,x)$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G: & \leftarrow & p(x), r(b,x) \\ C_1: p(y) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,z) & \leftarrow & p(z) \\ C_3: r(u,a) & \leftarrow & q(u,a) \end{cases}$$

$s1 = \{x|y\}, G \wedge C1 \Longrightarrow G1$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G1: & \leftarrow & r(b,x) \\ C_1: p(x) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,z) & \leftarrow & p(z) \\ C_3: r(u,a) & \leftarrow & q(u,a) \end{cases}$$

$s2 = \{b|u, a|x\}, G1 \wedge C3 \Longrightarrow G2$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G2: & \leftarrow & q(b,a) \\ C_1: p(a) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,z) & \leftarrow & p(z) \\ C_3: r(b,a) & \leftarrow & q(b,a) \end{cases}$$

$s3 = \{a|z\}, G2 \wedge C2 \Longrightarrow G3$

$$\mathcal{P}+\mathcal{G} = \begin{cases} G3: & \leftarrow & p(a) \\ C_1: p(a) & \leftarrow & \\ C_2: q(b,a) & \leftarrow & p(a) \\ C_3: r(b,a) & \leftarrow & q(b,a) \end{cases}$$

$G3 \wedge C1 \Longrightarrow \square$ Por lo tanto, E se deduce de $\mathcal{P}$, cambiando x por a.