PRIMERA PARTE

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

i) Calcular si existe determinante de A.

Para realizar este calculo se utiliza la Regla del triángulo:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = 2b + 3ab + 0 - 3ab - 2a - 0 = \boxed{2b(1-a)}$$

No existe, el determinante de la matriz ampliada. Puesto que, al ser una matriz no cuadrada no se puede calcular su resultado.

Estudiar el rang (A) para los distintos valores que puede tomar a y b:

$$|A| = 2b(1-a) \longrightarrow |A| = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \begin{matrix} \nearrow b=0 \\ \searrow a=1 \end{matrix}$$

- Si $b=0$ y $a=1$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Caso } 1}$

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow Rg(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow [Rg(A) = 2]$

- si $b=0$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Caso } 2}$

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2a$

$\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0$

$2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$\boxed{\text{Caso } 2.1}$ $\nearrow$ si $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \neq 0$

$\searrow$ si $a = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\boxed{\text{Caso } 2.2}$

$\Big\}$ Por tanto, $Rg(A) = 2$

- si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a = 1$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Caso } 3}$

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow [Rg(A) = 2]$

- si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\longrightarrow$ $\boxed{\text{Caso } 4}$

$|A|$ como hemos estudiado antes $\rightarrow$ $|A| \neq 0$

Por tanto $Rg(A) = 3$.

Continuando con el rango de la ampliada;

Caso 1 : $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\longrightarrow$ Como la columna 2 y 4 está completa de 0 podemos hacer el estudio de

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$ Eso quiere decir que rang $(A|B) = 2$

Caso 2:

$$Rg\ A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 3 & 0 & 1 & (a-1) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & (a-1) \end{pmatrix}$$

Caso 2.1 $a \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & (a-1) \end{vmatrix} = 2a^2 - 2a$$

$a(2a-2)=0$

$a = 0 \rightarrow$ En este caso se descarta ya que $a \neq 0$
$a=1$

encontramos dos caso $a \neq 1$ $Rg(A^*) = 3$
$a=1$ $Rg(A^*) = 2$ → Este no se puede tener en cuenta en este caso $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

Caso 2.2 $a=0$

Como hemos podido observar cuando $a=0$ $|A^*| = 0$, por tanto, $Rg\ (A^*) = 2$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$

Caso 3:

$$Rg\ (A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 3 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, como podemos observar la matriz es la misma que en (A).
Por ello, $Rg\ (A^*) = 2$

Caso 4:

Al ser el $Rg\ (A) = 3$ el rango de la ampliada no puede ser 4. No obstante,

se decuce que el $Rg\ (A^*) = 4$

Caso 1: Si $b=0$ y $a=1$

i) $Rg(\Delta) = 2$ Por tanto, dim (E) = dim (W)

ii)

Al haber realizado el rg con el determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ eso nos quiere decir que el subespacio es:

$W = \langle (2,0,3), (a,a,1) \rangle$ una base es $\{(2,0,3), (1,1,1)\}$

$E = (0,0,0) + \langle (2,0,3), (1,1,1) \rangle$ $\dim(E) = 2$

Al ser un espacio vectorial ligado. Podemos decir que es un subespacio

iii) Con ese subespacio generado anteriormente obtenemos las ecuaciones implícitas

Parametricas $\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha+\beta \\ y = \beta \\ z = 3\alpha+\beta \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = x-2\alpha \\ y = z-3\alpha \end{array}$ $\begin{array}{l} x-2\alpha = z-3\alpha \\ x-z = -\alpha \\ z-x = \alpha \end{array}$

$x = 2z - 2x + y \rightarrow \boxed{3x - 2z - y = 0}$ Es la ecuación implícita

Caso 2: Si $b=0$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ El único caso valido es $b=0$; $a=0$

ya que $Rg(\Delta) = 2$ y $Rg(A^*) = 3$ → Salvo en $a=0$

$Rg(\Delta) = 2 = Rg(A$

i) dim (E) = dim (W) Por tanto, dim (E) = 2

ii)

Al haber realizado el rg con el determinante $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ eso nos quiere decir que el subespacio es:

$W = \langle (2,0,3), (0,0,1) \rangle$ una base $\langle (2,0,3), (0,0,1) \rangle$ $E = (0,0,-1) + \langle (2,0,3), (0,0,1) \rangle$

Al ser un espacio vectorial ligado. Podemos decir que es un subespacio

iii) Con ese subespacio generado anteriormente obtenemos las ecuaciones implícitas

Parametricas $\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha \\ y = 0 \\ z = \beta - 1 \end{array}\right\}$

Caso 3: Si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a=1$

i) $Rg(\Delta) = 2$ Por tanto, dim (E) = 2

ii)

Al haber realizado el rg con el determinante $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix}$ eso nos quiere decir que el subespacio es:

$W = \langle (2,0,3), (a,a,1) \rangle$ una base $\langle (2,0,3), (1,1,1) \rangle$ $E = (0,0,0) + \langle (2,0,3), (1,1,1) \rangle$

Al ser un espacio vectorial ligado. Podemos decir que es un subespacio

iii) Con ese subespacio generado anteriormente obtenemos las ecuaciones implícitas

Parametricas $\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha+\beta \\ y = \beta \\ z = 3\alpha+\beta \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y = x-2\alpha \\ y = z-3\alpha \end{array}$ $\begin{array}{l} x-2\alpha = z-3\alpha \\ x-z = -\alpha \\ z-x = \alpha \end{array}$

$x = 2z - 2x + y \rightarrow \boxed{3x - 2z - y = 0}$ Es la ecuación implícita

SEGUNDA PARTE

Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, la variedad vectorial E del espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}$) V tal que, respecto de la base $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V, satisface las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 + 2\alpha + b\beta + a\gamma \\ y = 0 + 0\alpha + b\beta + a\gamma \\ z = (a-1) + 3\alpha + b\beta + 1\gamma \end{array}\right\} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Por tanto, podemos observar que la $\dim(V) = 3$

$$E = \left\{ (x,y,z)_B \;\middle/\; \left.\begin{array}{l} x = 0 + 2\alpha + b\beta + a\gamma \\ y = 0 + 0\alpha + b\beta + a\gamma \\ z = (a-1) + 3\alpha + b\beta + 1\gamma \end{array}\right\} \right. = \left\{ \left(0 + 2\alpha + b\beta + a\gamma \;,\; 0 + 0\alpha + b\beta + a\gamma \;,\; (a-1) + 3\alpha + b\beta + 1\gamma \right) \right\}_{\alpha,\beta,\gamma \in}$$

Gracias a este cambio, el problema podemos comenzar a trabajarlo en coordenadas.

$$E = \underbrace{(0, 0, (a-1))}_{\text{vector}} + \underbrace{(\alpha(2,0,3) + \beta(b,b,b) + \gamma(a,a,1))}_{\text{dirección del subespacio. } W}$$

$$W = \langle (2,0,3), (b,b,b), (a,a,1) \rangle$$

Tenemos que estudiar el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = 2b + 3ab + 0 - 3ab - 2a - 0 = \boxed{2b(1-a)}$$

$$|A| = 2b(1-a) \longrightarrow |A| = 0 \Rightarrow 2b(1-a) = 0 \begin{array}{l} \nearrow b = 0 \\ \searrow a = 1 \end{array}$$

- Si $b = 0$ y $a = 1$ → Caso 1

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \longrightarrow Rg(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \Rightarrow \boxed{Rg(A) = 2}$

- Si $b = 0$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ → Caso 2

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2a$

$\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0$

$2a = 0 \Rightarrow a = 0$

$\boxed{\text{Caso 2.1}}$

$\nearrow$ si $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \neq 0$

$\searrow$ si $a = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$\boxed{\text{Caso 2.2}}$

} Por tanto, $Rg(A) = 2$

- Si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a = 1$ → Caso 3

$|A| = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow \boxed{Rg(A) = 2}$

- Si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ → Caso 4

$|A|$ como hemos estudiado antes → $|A| \neq 0$

Por tanto $Rg(A) = 3$. → Las tres ecuaciones son independientes

→ Los tres vectores son generadores de W

ii)

Para discutir el sistema $AX = B$ tenemos que tener en cuenta diferentes reglas.

$AX = B \Rightarrow A^{-1}\cdot AX = A^{-1}\cdot B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}\cdot B}$

$A^{-1}\cdot A = 1$

Esto se cumple si y solo si el determinante de $A \neq 0$ ya que

$A^{-1} = \frac{(Adj\,A)^t}{|A|}$ Por tanto el $|A|$ no puede ser 0.

Esto se cumplica siempre y cuando $a \neq 1$ $b \neq 0$

Este caso solo se cumple cuando $Rg\ (A) = 3$

Para el resto de casos, $Rg(2)$

Procederemos a resolver las ecuaciones ya que $Rg\ (A) = 2$

$Rg\ (A^*) = 2$ 3 incognitas − 2 ecuaciones = 1 parametro.

y hay 3 ecuaciones y

iii)

Para resolver la ecuación primero debemos encontrar el inverso.

La formula es $\Delta^{-1} = \dfrac{(\Delta^{*})^{T}}{|\Delta|}$

$\rightarrow$ A^{-1} Matriz inversa
$\rightarrow$ $|A|$ Determinante de la matriz
$\rightarrow$ A^{*} Matriz adjunta
$\rightarrow$ $(A^{*})^{T}$ Matriz traspuesta de la adjunta.

$$\text{Adj}(\Delta) = \begin{pmatrix} (b-ab) & -3a & -3b \\ -(b-ab) & 2-3a & -b \\ 0 & -2a & 2b \end{pmatrix} \qquad (\text{Adj}(\Delta))^{t} = \begin{pmatrix} (b-ab) & -(b-ab) & 0 \\ -3a & 2-3a & -2a \\ -3b & -b & 2b \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{-1} = \frac{(\text{Adj}(\Delta))^{t}}{|\Delta|} = \begin{pmatrix} \frac{b(1-a)}{2b(1-a)} & \frac{-b(1-a)}{2b(1-a)} & 0 \\ \frac{-3a}{2b(1-a)} & \frac{2-3a}{2b(1-a)} & \frac{-2a}{2b(1-a)} \\ \frac{-3b}{2b(1-a)} & \frac{-b}{2b(1-a)} & \frac{2b}{2b(1-a)} \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-3a}{2b(1-a)} & \frac{2-3a}{2b(1-a)} & \frac{-a}{b(1-a)} \\ \frac{-3}{2(1-a)} & \frac{-1}{2(1-a)} & \frac{1}{(1-a)} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix} \qquad X = \Delta^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{b} \\ -1 \end{pmatrix}$$

1×3

$$X = \underbrace{\underset{3\times3}{\Delta^{-1}} \cdot \underset{3\times1}{B}} \Rightarrow X \text{ es una matriz } 3\times1$$

Caso 1:

Para resolver el caso 1; $b=0$ $a=1$

$$\Delta^{*} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$ al realizar el determinante 2x2 con la segunda y tercera matriz:

$$\left.\begin{array}{r} z=0 \\ 3x+z=0 \end{array}\right\}$$ obtenemos que $z=0$; $x=0$ y el parametro será y $y=\alpha$

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R}$$

Caso 2:

$b=0$ y $a=0$ debido a que, 1 no se puede coger en este caso

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Podemos observar que la segunda fila son todo 0 y como $Rg(A) = 2 = Rg(A^{*})$ y hay dos ecuaciones y 3 incognitas $y=\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x=0 \\ 3x+z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \quad y=\alpha \\ z=-1 \end{array} \qquad X = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -1 \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R}$$

Caso 3:

$b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a=1$ $Rg(\Delta^{*}) = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & b & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 & 0 \\ 3 & b & 1 & 0 \end{array}\right)$$

parametro la y $y=\alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{r} 2x+b\alpha+z=0 \\ b\alpha+z=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x=0 \\ z=-b\alpha \end{array}$$ Por tanto; $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -b\alpha \end{pmatrix} / \alpha \in \mathbb{R}$

Caso 4: si $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

i) $\mathrm{Rg}(A) = 3$ Por tanto, $\dim(E) = 3$

ii)

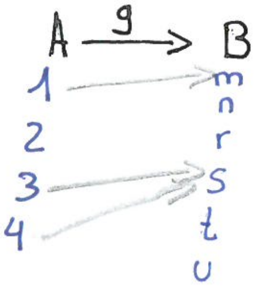
Las tres ecuaciones son independientes. Por tanto, los tres vectores son independientes.

$W = \langle (2,0,3), (b,b,b), (a,a,1) \rangle$ una base $\langle (2,0,3), (1,1,1), (2,2,1) \rangle$ $E = (0,0,1) + \langle (2,0,3), (1,1,1), (2,2,1) \rangle$

Al ser un espacio vectorial ligado. Podemos decir que es un subespacio

iii) En este caso no hay ecuaciones implícitas

Aplicación:



"m" es la imagen de "1"
"1" es la antiimagen de "m"

Es <u>aplicación</u> porque $\boxed{\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a)=b}$

↳ Cada elemento del $\mathbb{R}$ tiene una única imagen de $\mathbb{R}'$

↳ Del conjunto A, cada elemento saca una única flecha a B

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$; Dominios $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1/x$

$f(x) = 2x$ ↳ $-\{0\}$

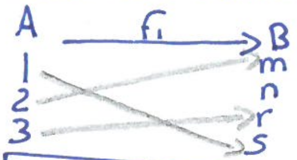
Es <u>imagen</u> $\boxed{Im(f) = \} f(a) / a \in A \{}$

Tipos de aplicación:

1- Inyectiva: $\boxed{\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')}$

↳ Cada elemento de B es imagen de <u>un</u> elemento de A

↳ B recibe una sola flecha de A



2- Sobreyectiva: $\boxed{\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b}$

↳ Todo elemento de B es imagen de A

↳ Cada elemento de B recibe al menos una flecha de A

3- Biyectiva: $A \xrightarrow{f_1} B$ Se cumple lo anterior

Imágenes:

Im(f): Allá donde el resultado toma valores

Imágenes recíprocas o antiimagen: $\boxed{f^{-1}(D) = \} a \in A / f(a) \in D \{}$

20/ 8 harinas ~~c~~ 6 harinas d 3 vitaminas

3 2 2

NT, ~~R~~ NR, NO

$C_{8,3} \cdot C_{6,2} \cdot C_{3,2} = 250$

$P = m!$

$PR = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2!}$

$VR = \cancel{m!}\ m^n$

$V = \frac{m!}{(m-n)!}$

$C = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$CR = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

21/ 4 jugadores, de 40 cartas 3 a cada uno

NO, NT, NR

$C_{40,3} \cdot C_{37,3} \cdot C_{34,3} \cdot C_{31,3}$

25/ R C, J, M, 6 al menos 2

NO, NT, NR

~~$V_{5,2}$~~ $C_{5,2} + C_{5,3} + C_{5,4} + C_{5,5}$

24) 4 monedas a la vez, 2 caras y 2 cruces

a) 4 monedas iguales

NR, NO, IT

V

3/ a) Euclides, m.c.d $(224, 71) = 1$

$224 \,|\, 71$: $11 \quad 3$

$71 \,|\, 11$: $5 \quad 6$

$11 \,|\, 5$: $1 \quad 2$

$5 \,|\, 1$: $0 \quad 5$

$mcd(224,71) = mcd(71,11) = mcd(11,5) = 1$

b) Bezout

$224 = 71 \cdot 3 + 11$ $\quad 71 = 11 \cdot 6 + 5$ $\quad 11 = 5 \cdot 2 + 1$

$11 = 224 - 71 \cdot 3$ $\quad 5 = 71 - 11 \cdot 6$ $\quad 1 = 11 - 5 \cdot 2$

$1 = 11 - 5 \cdot 2;\ 1 = 11 - (71 - 11 \cdot 6) \cdot 2;\ 1 = 11 + 71 \cdot (-2) + 11 \cdot 12;\ 1 = 224 + 71 \cdot (-3) + 71 \cdot (-2)$
$+ (224 + 71 \cdot (-3)) \cdot 12 = 224 \cdot 13 + 71 \cdot (-41)$

$x = x_0 + b/d \cdot k$ $\quad y = y_0 - a/d \cdot k$ $\quad x = 13 + 224/1 \cdot k$ $\quad y = -41 - 71/1\, k$

c) Inverso de $\overline{71}$ en $\mathbb{Z}_{224}$

Usando Bezout, $\underbrace{224 \cdot 13}_{0} + 71 \cdot (-41) \equiv 1 \pmod{224};\ 71 \cdot (-41) \equiv 1 \pmod{224}$

$\hookrightarrow 224 - 41 = 183$

3) $mcd(142, 448) = 2$

$142x \equiv 4 \pmod{448}$ tiene solución?

$mcd(142,448)=2$ y $4|2$ por lo que la relación de congruencias tiene solución

$\frac{142}{2}x \equiv \frac{4}{2} \pmod{\frac{448}{2}}$; $71x \equiv 2 \pmod{224}$

$\Downarrow$

ambos lados por 183 (inverso

$x \equiv 2 \cdot 183 \pmod{224}$

$x \equiv 366 \pmod{224} \Rightarrow x \equiv 142 \pmod{224}$

$x \equiv 142 + 224k \pmod{448}, k = 0,1$

4) a) $mcd(460, 233) = 1$

$460 \,\underline{|233}$; $227 \quad 1$; $227 = 460 - 233 \cdot 1$

$233 \,\underline{|227}$; $6 \quad 1$; $6 = 233 - 227 \cdot 1$

$227 \,\underline{|6}$; $5 \quad 37$; $5 = 227 - 37 \cdot 6$

$6 \,\underline{|5}$; $1 \quad 1$; $1 = 6 - 5 \cdot 1$

$5 \,\underline{|1}$; $0 \quad 5$

$1 = 6 - 227 + 37 \cdot 6$; $1 = 6 + 227 \cdot (-1) + 37 \cdot 6$; $1 = 233 + 227 \cdot (-1) + 227 \cdot (-1) + 37 \cdot (233 + 227 - 1)$

$1 = 233 + 227 \cdot (-2) + 233 \cdot (37) + 227 \cdot (-1)$; $1 = 233 \cdot (38) + 227 \cdot (-3)$; $1 = 233 \cdot (38) + (460 + 233(-1)) \cdot 3$

$1 = 460 \cdot (-3) + 233 \cdot 41$

$1 = 6 - 5 \cdot 1$; $1 = 6 - (227 - 37 \cdot 6) \cdot 1$; $1 = 6 - 227 + 37 \cdot (-6)$; $1 = 233 - 227 + 37 \cdot (-233 + 227)$

$1 = 233 - 227 + 233 \cdot (-37) + 227 \cdot (37)$; $1 = 233 - 460 + 233 + 233 \cdot (-37) + 460 \cdot 37 + 233 \cdot (-37)$

$460 \cdot (36) + 233 \cdot (-37)$

$\hookrightarrow 17 \qquad \hookrightarrow -35$

Inyectiva $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) = f(a')$

Sobreyectiva $\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

$f^{-1}(D) = \{a \in A / f(a) \in D\}$

$Im(f) = \{f(a) / a \in A\}$

$P = m!$

$V = \frac{m!}{(m-n)!}$

$VR = m^n$

$C = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$CR = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

Reflexiva $\forall a \in A, aRa$

Simétrica $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

Antisim $\forall a, b \in A, aRb$ y $bRa \quad a = b$

Trans $\forall a, b, c \in A, aRb, bRc \Rightarrow aRc$

Grafos

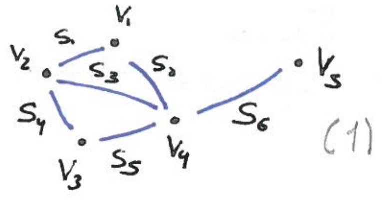
Mag nxn
Mam 2
Mig nxS
Mim nxS-lazos

$G = (N, S)$

N: nodos o vértices

S: segmentos o aristas $= \}u, v\{ \in S$

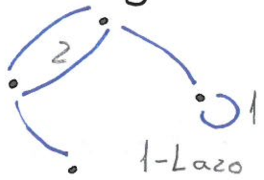
Grafo



Dos nodos son adyacentes si los une un segmento $(s_1 = \}V_1, V_2\{)$

Σ grados de los nodos $= 2 \cdot$ (nº segmentos)

Multigrafo

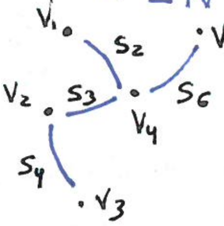


1-Lazo
2-Segmentos paralelos

Camino: Sucesión de nodos y segmentos de forma alternada
- Longitud: Número de segmentos
- Camino cerrado: $V_0 = V_n$
- Sendero: Todos los segmentos diferentes
- Trayectoria: Todos los
- Ciclo Camino cerrado donde todas los nodos son diferentes

Sugrafo

$N' \leq N \quad S' \leq S$



Propiedades
- Conexo: Si entre cualquier par de nodos existe un camino
- Distancia: Longitud mínima entre dos nodos
- Diámetro: Longitud máxima en un grafo
- Componente conexo: Subgrafo conexo y que no está contenido en ninguno mayor
  - $G - \}v\{$: Quito el nodo y los "s" unidos a él

X [• Completo: Si cada par de nodos determina un siegmento] X

Matriz de adyacencia (nodos)

$5 \Rightarrow 5 \times 5$
6

GRAFO SIMPLE

$G: \}N, S\{$

$a_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } \}v_i, v_j\} \in S \\ 0 \text{ si } \}v_i, v_j\} \notin S \end{cases}$

$$\begin{array}{c|cccccc} (1) & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & \\ V_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ V_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ V_3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ V_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\ V_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Cuadrada o o o o

Grado en fila o columnas

*Si es multigrafo se pone 2 o los que lleguen (paralelos) y puede haber 1s en la diagonal

GRAFO SIMPLE

Matriz de incidencia (nodos × segmentos)

5 nodos
6 segmentos ⇒ 5x6

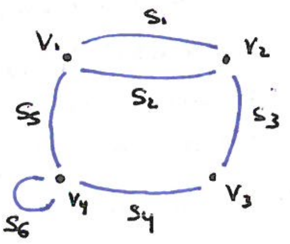
$$\begin{array}{c|cccccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\
\hline
V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
V_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
V_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
V_4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
V_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

MULTIGRAFO

Matriz de adyacencia

4 nodos
6 segmentos

$$\begin{array}{c|cccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\
\hline
V_1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\
V_2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\
V_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
V_4 & 1 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$



Matriz de incidencia

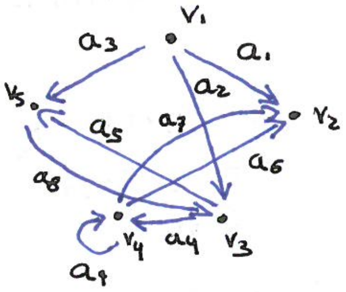
4 nodos
6 segmentos ⇒ 4x5 → no lazos

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & \cancel{S_6} \rightsquigarrow \text{Lazo} \\
\hline
V_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
V_2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\
V_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\
V_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}$$

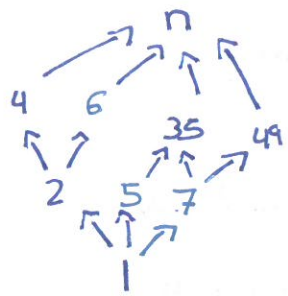
GRAFO DIRIGIDO

Matriz de adyacencia

$$\begin{array}{c|cccc}
 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \\
\hline
V_1 & & & & \\
V_2 & & & & \\
V_3 & & & & \\
V_4 & & & &
\end{array}$$



Ejercicio 2) ret$(X, |)$ donde $X = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 35, 49, 29401\}$



i) Operaciones $\wedge, \vee$ con las que $(X, \vee, \wedge)$ es un ret. algebraico y decir si $\vee$ es m.c.m

$x \vee y = \sup\{x, y\}$ $\qquad$ $x \wedge y = \inf\{x, y\}$

El "$\vee$" no es m.c.m pq $4 \vee 6 = n$ y m.c.m$(4,6) = 12$

ii) ¿Es ret dist?

1° Def: $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$2 \vee (5 \wedge 7) = (2 \vee 5) \wedge (2 \vee 7)$

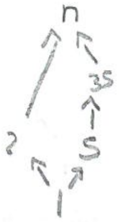
$2 \vee 1 \quad = \quad n \wedge n$

$2 \quad = \quad n$

NO se cumple la definición por lo que no es ret dist

2° Teorema 1: X NO Dist $\Leftrightarrow$ Hay ret. isomorfo a R_1 o R_2

$Y = \{2, 1, 5, 35, n\}$



Hay ret isom. a R_1 por lo que NO es dist

3° Teorema 2: X Dist $\Rightarrow$ Todo elemnt. X se expresa de forma única en base a elemnt D.I

Solo 1 flecha

$5 \vee 7 = 35$

$1 \vee 7 = 35$ $\qquad$ NO es dist

4° Propiedad: X Acotado $\Rightarrow$ Si hay complemento, es único

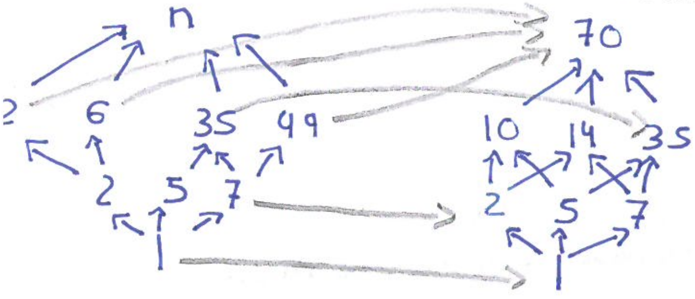
$\{2, \bar{5}\}$ $\vee = n$ $\quad$ $\wedge = 1$

$\{2, \bar{7}\}$ $\vee = n$ $\quad$ $\wedge = 1$ $\qquad$ Hay 2 elementos, NO es distributivo

iii) $f : (X, |) \longrightarrow (D_{70}, |)$

Homomorfismo

tal que $x \in X$, $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \mid 70 \\ 70 & \text{en otro caso} \end{cases}$



$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

$f(2 \vee 7) = f(2) \vee f(7)$

$f(2940) = 14$

$70 : 14$

$f(2 \vee 5) = f(2) \vee f(5)$

$f(2940) = 10$

$70 : 10$

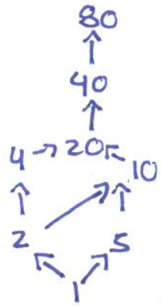
NO HAY HOMOMORFISMO

Ejercicio 1) $(X, |)$, donde $X = D_{20} \cup \{40, 80\}$ y $|$ es la rel

i) Construir retículo

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$D_{20} = \{1, 2, 4, 10, 20\}$



ii) ¿Es o no complementario?

Definición X comp $\Longleftrightarrow$ Cada elemento de X complementario es único, si es que existe

$2 = \bar{5}?$ $\Rightarrow$ $2 \vee 5 = 10$ $\quad 2 \wedge 5 = 1$ $\quad$ NO

$4 = \overline{10}?$ $\Rightarrow$ $4 \vee 10 = 20$ $\quad 4 \wedge 10 = 1$ $\quad$ NO

Teorema X comp $\Rightarrow$ Los únicos elementos D.I son los átomos

Átomos = 2; 5

DI = 2, 5, 4, 20, 40, 80 $\quad$ NO

Elementos notables:

✧ Cota:

Superior: $\forall b \in B, b \leq k_1$

Inferior: $\forall b \in B; k_1 \leq b$

✧ Extremos:

Supremo: $\sup(B)$

Ínfimo: $\inf(B)$

✧ - - - - -

Máximo: $\forall b \in B, b \leq \text{máx}(B)$

Mínimo: $\forall b \in B, \text{mín}(B) \leq b$

✧ Elemento

Maximal:

Minmal:

Reticulo ordenado:

$\vee : X \times X \longrightarrow X \qquad (x,y) \rightarrow x \vee y = \sup \}x,y\{$

$\wedge : X \times X \longrightarrow X \qquad (x,y) \rightarrow x \wedge y = \inf \}x,y\{$

* $\vee$ superior
$\wedge$ inferior

Distributividad de un retículo:

Definición:

$(X, \vee, \wedge)$ Distrib $\Longleftrightarrow \forall x, y, z \in X: \{ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Teorema 1:

X No Distrib $\Longleftrightarrow$ X poseé algún retículo isomorfo a R_1  o R_2 

Teorema 2:

X Distrib $\Longrightarrow$ Todo elemento de X se expresa en forma única salvo el orden como supremo de elementos D.I no comparables

Propiedad

X Acotado $\Rightarrow$ Si hay complementario, es único

$p \Rightarrow q$; no $p \Rightarrow$ no q

[Si hay 2 o más elementos no es complementario]

Para ser complementario

$$\begin{cases} a \wedge \bar{a} = 0_A \\ a \vee \bar{a} = 1_A \end{cases}$$

Homomorfismo:

$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$

Álgebra de Boole:

1- Es distributivo
2- Es complementario
3- Tiene 2^n elementos

Complementariedad de un retículo:

Definición:

X comp $\Longleftrightarrow$ Si todo elemento tiene solo un único elemento complementario

Para ser complementario

$a \wedge \bar{a} = 0_A$
$a \vee \bar{a} = 1_A$

Teorema:

X comp $\Longrightarrow$ Los únicos elementos D.I son los átomos

3) Dibuja GRAFO

IV) 6 nodos, conexo, 5 segmentos y un ciclo

NO = ARBOL

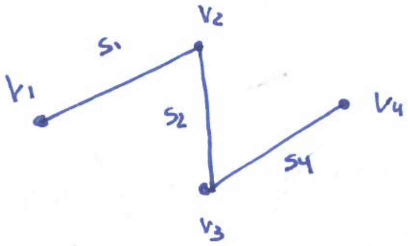
~~VIII) 4 nodos, 8 segmentos~~

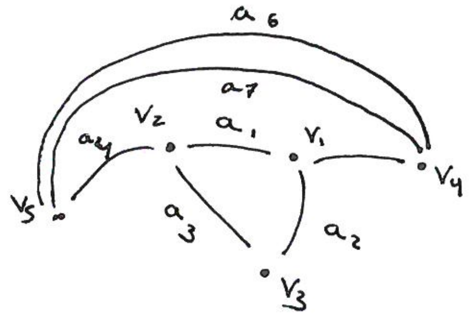
9) $$B = \begin{array}{c|cccc} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & b & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & a & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

¿a y b para que B matriz incidencia de de un grafo G?

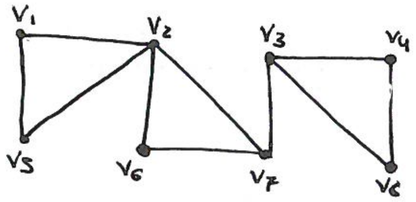
$b = 0$

b no puede ser 1 pq sería igual a la columna s_2, $a =$





1) Grafo



i) Trayectorias de vi a v_8

(v_1 v_2 v_7 v_3 v_8)
(v_1 v_2 v_7 v_3 v_4 v_8)
(v_1 v_2 v_6 v_7 v_3 v_8)
(v_1 v_5 v_2 v_7 v_3 v_8)
(v_1 v_5 v_2 v_7 v_3 v_4 v_8)
(v_1 v_5 v_2 v_6 v_7 v_3 v_8)
(v_1 v_5 v_2 v_6 v_7 v_3 v_4 v_8)
(v_1 v_2 v_6 v_7 v_3 v_4 v_8)

ii) Distancias $d(v_1,v_3)$ $d(v_1,v_8)$

$d(v_1,v_3) =$ segment. mínimas = 3
$d(v_1,v_8) = 4$

iii) Diámetro

Máx dist = $d(v_1,v_8) = d(v_1 v_4) = 4$

iv) Grado de cada nodo. ¿Algún punto de corte?

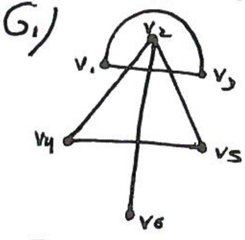
v_1 : 2
v_2 : 4 PC
v_3 : 3 PC
v_4 : 2
v_5 - 2
v_6 - 2
v_7 - 3 PC
v_8 - 2

v) Segmento puente

Si $G - \}s\{$ sepora el Grafo, en este caso solo $s = \}v_3, v_7\{$

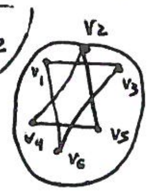
2) Define los grafos/multigrafos, conexos, ciclos, lazos...

G1)



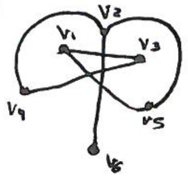
Multigrafo, segmento paralelos entre vi y v_3
No es conexo pq $\}v_1 v_3\{$ no conecta al resto
Ciclo de (v_1, v_3, v_1) y (v_4, v_5, v_2, v_5).
No lazos

G2)



Multigrafo por lazo en v_2
Es conexo porque todo nodo puede conectar con otro mediante un camino
Ciclos de (v_1 v_3 v_6 v_1) y (v_4 v_5 v_2 v_4)

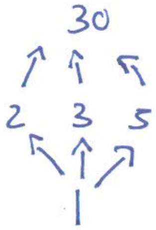
G3)



Grafo pq ni lazo ni seg paralelo
Es conexo
Ciclo (v_5 v_2 v_4 v_1 v_3 v_5)

D: }30,1{ = }1,2,3,6,5,15,10,30{

$$\begin{array}{r|l} D\ 30 & 3 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



$T = 30$

$1 \wedge 30 = 1$

$1 \vee 30 = 30$

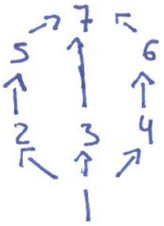
$2 = \bar{3}$

$2 \wedge 3 = 1$

$2 \vee 3 = 30$

Distribui

$\forall x,y,z \in X: x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$



$2 \vee (3 \wedge 5) = (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5)$

$2 \vee 1 = 7 \wedge 5$

$2 \neq 5$

A = }1,2,3,5,30{

iii/ ¿Es distributivo?

Definición

$X \text{ dist} \Leftrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

$2 \vee (5 \wedge 10) = (2 \vee 5) \wedge (2 \vee 10)$ Se cumple

$2 \vee 5 = 10 \wedge 10$

$10 = 10$

$4 \vee (5 \wedge 10) = (4 \vee 5) \wedge (4 \vee 10)$

$4 \vee (5) = 20 \wedge 20$

$20 = 20$

Teorema 1

X No dist $\Leftrightarrow$ Si existe un subretículo isomorfo a R_1 o R_2

No existe ya que $\sup\{x,y\}$ nunca será 80 en $x,y \in X$

Teorema 2

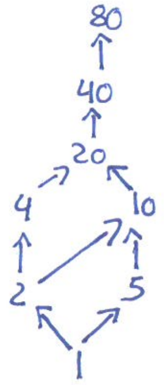
X dist $\Rightarrow$ Todo elemento se expresa como forma única $\vee$ el supremo de elementos D.I salvo el orden

$2 \vee 5 = 10$ $2 \vee 10 = 20$

$5 \vee 4 = 20$

No sirve para demostrarlo pero las otras dos sí

iv/ $F : (X, |) \rightarrow (D_{40}, |)$ por $f(x) = \begin{cases} 40/x & \text{si } x \neq 80 \\ 40 & \text{si } x = 40 \end{cases}$ 1, 8, 20, 10, 4, 2, 40, 1



Homomorfismo:

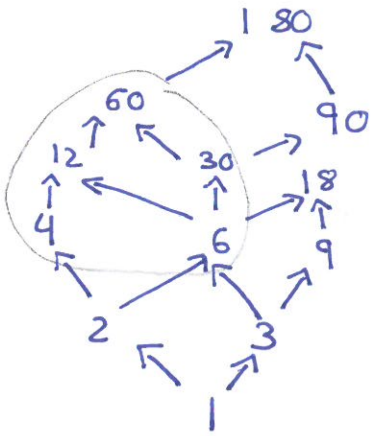
$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

$f(2 \vee 5) = f(2) \vee f(5)$ NO

$f(10) = 20 \vee 8$

$4 \neq 40$

2/ X = } 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 30, 60, 90, 180 {



a) Elementos notables B = } 4, 6, 12, 30, 60 {

2) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Biyectiva

$\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

$\forall z \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} / f(x) = z$

no pq la función solo existe de $[0, +\infty)$ y no hay imagen

Inyectiva

$\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

Si tomo 2 elementos dif no tendrán la misma img

No pq $2 \neq -2$ pero $f(2) = f(-2)$

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

$\text{Im}(f) = \} f(a) / a \in A \{$

$f^{-1}(D) = \} a \in A / f(a) \in D \{$

$f^{-1}(D) = \} a \in A / f(a) = D \{$

$f^{-1}(2) = \} x \in \mathbb{R} / f(x) = 2 \{ ; \; f^{-1}(2) = \} x \in \mathbb{R} / |x| = 2 \{$

$= x = \} 2, -2 \{$

Rel de equivalencia => Tras, simétrica y Ref

Ref => $\forall a \in A, aRa$

Sim => $\forall a, b \in A, aRb \Rightarrow bRa$

Transitiva => $\forall a, b, c \in A, aRb$ y $bRc \Rightarrow aRc$

Orden => Ref, antisim, y tras

Ref => $\forall a \in A, aRa$

Antisim => $\forall a, b \in A, aRb$ y $bRa, \; a = b$

Transi => $\forall a, b, c \in A, aRb, bRc, aRc$

$aRb \iff a \leq b$

Reflexiva ⇒ $\forall a \in A,\ aRa$

se cumple ya que todo elemento es menor o igual es

Simétrica ⇒ $\forall a, b \in A,\ aRb \Rightarrow bRa$

$2R3$ pero $3 \not R 2$

Antisimétrica ⇒ $\forall a, b \in A,\ aRb$ y $bRa,\ a = b$

Transitiva ⇒ $\forall a, b, c \in A,\ aRb$ y $bRc,\ aRc$

$1, 2, 3$

$1R3$ y $2R3$

$aRb \iff a^2 = b^2$

Reflexiva ⇒ $\forall a \in A,\ aRa$

Si pq por ejemplo $2^2 = 2^2$

Simétrica ⇒ $\forall a, b \in A,\ bRa,\ aRb$

Si pq $3^2 = 3^2$ y $3^2 = 2^2$

Tras: $\forall a, b, c\ aRb\ \ bRc \Rightarrow aRc$

Antism ⇒ $\forall a, b\ \ aRb,\ bRa,\ a = c$

$aRb\ \ a^2 = b$

Antism ⇒ $\forall a, b\ \ a$

Orden ⇒ Ref, Antism, Tras
Equiv ⇒ Ref, Sim, tras

CC: A/R

1/ Divide $-1345 : 13$

$1345 \,\underline{|\,13}$
$\circled{6} \;\; -103$

$-1345 = 13\cdot(-103)\underbrace{-6}_{\text{No puede ser}} \Rightarrow -1345 = 13\cdot(-103)-13+13-6;$
$-1345 = 13\cdot(-104)+7$

2/ Divide $-10053 : -45$

$10053 \,\underline{|\,45}$
$18 \;\; 223$

$10053 = 223\cdot 45+18 \xrightarrow{\cdot(-1)} -10053 = 223\cdot(-45)-18$

$-10053 = 223\cdot(-45)-45+45-18; \; -10053 = 224\cdot(-45)+27$

3/ Divide $41522 : -96$

$41522 \,\underline{|\,96}$
$50 \;\; 432$

$41522 = 96\cdot 432+50 \Rightarrow 41522 = (-96)\cdot(-432)+50$

Mcd y Mcm

$m.c.d(a,b)\cdot m.c.m(a,b) = a\cdot b$

1/ $m.c.d(45573, 4521)$ y mcm

$45573 \,\underline{|\,4521}$ $363 \;\; 10$

$4521 \,\underline{|\,363}$ $165 \;\; 12$

$363 \,\underline{|\,165}$ $33 \;\; 2$

$165 \,\underline{|\,33}$ $0 \;\; 5$

$mcd(45573, 4521) = mcd(4521, 363) = mcd(363, 165) = mcd(165, 33) = 33$

$mcd\cdot mcm = a\cdot b \;;\; mcm = a\cdot b/mcd = 45573\cdot 4521/33 = 6243501$

→ Euclides $45573 = 4521\cdot 10+363$ $4521 = 363\cdot 12+165$ $363 = 165\cdot 2+33$

$363 = 45573-4521\cdot 10$ $165 = 4521-363\cdot 12$ $33 = 363-165\cdot 2$

$33 = 363-165\cdot 2;\; 33 = 363-(4521-363\cdot 12)2;\; 33 = 363+4521\cdot(-1)+363\cdot 24;$

$33 = 45573+4521(-10)+4521\cdot(-1)+(45573-4521\cdot 10)24;\; 45573\cdot(25)+4521(-252) = 33$ (*)

→ Ec. diofántica

$x = x_0 + b/d\cdot k \quad x = 25+45573/33\,k$

$y = y_0 - b/d\cdot k \quad y = -252-4521/33\,k.$

→ Consideremos $45573x+4521y = 99$

(*) $45573\cdot(25\cdot 3)+4521\cdot(-252\cdot 3) = 99$

$x = x_0 + b/d\,k$ $\Rightarrow$ $x = 75+45573/3\,k$

$y = y_0 \;\; a/d\,k$ $y = -756-1381k$

1) En el anillo $(\mathbb{Z}_{22},+,\cdot)$, ¿cuáles inversos y cuáles divisores de 0? $\{0,1,2\ldots,21\}$ $\nearrow 23, 45, 67, 89\ldots$

Tienen inveso todos aquellos tales que $x \cdot 6 \equiv 1 \pmod{22}$

$1 \cdot 1 \equiv 1$

$2 \cdot 11 \equiv$

$\forall a \in A, \exists\, b \in b / f(a) = b$ $\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a) = b$

$\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a) = b$ $\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a) = b$

Inyectiva $\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

Aplicación $\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a) = b$

Biyectiva $\forall b \in B, \exists\, a \in A / f(a) = b$

$\Rightarrow 14, 27, 40, 53, 66$

2) Inversos en $\mathbb{Z}_{13} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots \overline{12}\}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ $\quad \bar{1}^{-1} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{7} = \bar{1}$ $\quad \overline{2^{-1}} = \bar{7};\ \overline{7^{-1}} = \bar{2}$

$\bar{3} \cdot \bar{9} = \bar{1}$ $\quad \overline{3^{-1}} = \bar{9};\ \overline{9^{-1}} = \bar{3}$

$\bar{4} \cdot \overline{10} = \bar{1}$ $\quad \overline{4^{-1}} = \overline{10};\ \overline{10^{-1}} = \bar{4}$

$\bar{5} \cdot \bar{8} = \bar{1}$ $\quad \overline{5^{-1}} = \bar{8};\ \overline{8^{-1}} = \bar{5}$

$\bar{6} \cdot \overline{11} = \bar{1}$ $\quad \overline{6^{-1}} = \overline{11};\ \overline{11^{-1}} = \bar{6}$

$\overline{12} \cdot \overline{12} = \bar{1}$ $\quad \overline{12^{-1}} = \overline{12}$

$x \cdot 6 \equiv 1 \pmod{a}$

$\forall a \in A, \exists!\, b \in B / f(a) = b$

$\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$\forall b \in B, \exists\, a \in A / f(a) = b$

3) ¿17 tiene inverso en 112?

Tendrá inverso si $m.c.d(a,b) = 1$; 17 tiene inverso porque es primo y $mcd(17, 112) = 1$

Bezout =

$112 \,\underline{|17}$ $\quad 10 \quad 6$

$17 \,\underline{|10}$ $\quad 7 \quad 1$

$10 \,\underline{|7}$ $\quad 3 \quad 1$

$7 \,\underline{|3}$ $\quad 1 \quad 2$

$3 \,\underline{|1}$ $\quad 0 \quad 3$

$112 = 17 \cdot 6 + 10$ $\quad 17 = 10 \cdot 1 + 7$ $\quad 10 = 7 \cdot 1 + 3$ $\quad 7 = 3 \cdot 2 + 1$

$10 = 112 - 17 \cdot 6$ $\quad 7 = 17 - 10 \cdot 1$ $\quad 3 = 10 - 7 \cdot 1$ $\quad 1 = 7 - 3 \cdot 2$

$1 = 7 - 3 \cdot 2;\ 1 = 7 - 2 \cdot (10 - 7 \cdot 1);\ 1 = 7 - 20 + 7 \cdot 2;\ 1 = 17 - 10 \cdot 1 - 20 + (17 - 10 \cdot 1) \cdot 2;$

$1 = 17 - 10 + 10 \cdot (-2) + 17 \cdot 2 - 10;\ 1 = 17 - 112 + 17 \cdot 6 + 10 \cdot (-2) + 17 \cdot 2 - 112 \cdot (-2) + 17 \cdot 12$

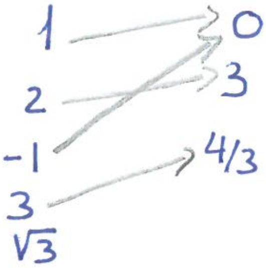
$1 = 17 \cdot 33 + \underbrace{112 \cdot (-5)}_{0} \sim 1$ $\quad \overline{17^{-1}} = \overline{33}$

3) Son aplicaciones?

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (x^2-1)/(x^2-3)$

No pq no se cumple que $\forall a \in A;\ \exists!\ b \in B / f(a) = B$



b) $f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = (x^2-1)/(x^2-3)$

Si pq $\forall a \in A, \exists!\ b \in B / f(a) = b$

4) ¿Es inyectiva?

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x+3$

$f(x) = f(x')$; $2x+3 = 2x'+3$; $2x = 2x'$; $x = x'$. Es pq $\forall a, a' \in A, a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2+3$

No es inyectiva pq no $\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2+3$

Es inyectiva pq $\forall a, a' \in (0, +\infty),\ a' \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

5) Tipos de aplicaciones

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 2x-3$

Inyectiva $\rightarrow \forall a, a' \in A,\ a' \neq a \Rightarrow f(a) \neq f(a)$

$1 \neq -1$ y $f(1) \neq f(-1)$

$3 \neq 0$ y $f(3) \neq f(0)$

Es inyectiva pq se cumple la definición

Sobreyectiva $\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

↳ Toda imagen tiene antiimagen

tiene sobreimagen

↳ Si pq $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ por lo que toda imagen

b) Para $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x,y) = |y+1|,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

6.1) Imagen (f) y tipo de aplicación

$\mathrm{Im}(f) = [0, \infty)$

¿Inyectiva? $\rightarrow \forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

$\forall (x,y), (x',y') \in \mathbb{R},\ (x,y) \neq (x',y') \Rightarrow f(x,y) \neq f(x',y')$

↳ No se cumple pq $(5,2) \neq (3,2)$ pero $f(5,2) = f(3,2)$

¿Biyectiva? $\rightarrow \forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

$\forall z \in \mathbb{R}, \exists (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = z$

↳ No existe la Imagen en $\mathbb{R}$ por lo que no puede ser biyectiva

6.2) Definir antiimagen y hallar $f^{-1}(\}-2\{)$ y $f^{-1}(\}2\{)$

$f^{-1}(D) = \}x \in A \,/\, f(A) = D)$

$f^{-1}(-2) = \}(x, y \in \mathbb{R})^2 / f(x,y) = -2\{ = \emptyset$

$f^{-1}(2) = \}(x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) = 2\{ = \}(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |y+1| = 2\{ =$

$= \}(x,1) / x \in \mathbb{R}\{ \cup \}(x,-3) / x \in \mathbb{R}\{$

Inye $\forall a, a' \in A,\ a \pm a' \Rightarrow f(a) \pm f(a')$

Biyec $\forall b \in B,\ \exists\, a \in A / f(a) = b$

$\mathrm{Im}(f) = \}f(a) / a \in A\{$

$f^{-1}(D) = \}a \in A / f(a) \in D\{$

Rel de equivalencia

$\Rightarrow$ Reflexiva $\forall a \in A,\ aRa$

Simétrica $\forall a, b \in A,\ aRb \Rightarrow bRa$

Transitiva $\forall a, b, c \in A,\ aRb$ y $bRc \Rightarrow aRc$

Antisimétrica $\forall a, b \in A \quad aRb$ y $bRa \quad a = b$

2/ Zamora, 22 iglesias y 10 sitios

a) Visitar todo, de cuantas formas?

No repite, importa el orden y todas intervienen

$P_{32} = 32!$

b) Las iglesias por un lado y sitios por otro

No repite, todas intervienen e importa el orden

$P_{m} \cdot P_{m} = P_{22} \cdot P_{10} = 22! \cdot 10!$

c) Capuchinos de 4 colores (A, V, R, Am) y velas 3 (P, M, 6)

7 capuchinos y 4 velas

Repite, no importa el orden y no todas intervienen

$$CR_{m,n} \cdot CR_{m,n} = CR_{4,7} \cdot CR_{3,4} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} \cdot \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} =$$

$$= \frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{6!}{4! \cdot (3-1)!} = 1800$$

3/ 7 museos, 10 monumentos y 15 rincones

a) Cada uno por su parte

No repite, interviene todo e importa el orden

$P_m \cdot P_n \cdot P_m = P_7 \cdot P_{10} \cdot P_{15} = 7! \cdot 10! \cdot 15!$

b) Museos juntos y el resto da igual

NR, IO, TI

NR, IO, TI

$P_7 \cdot P_{25} = 7! \cdot 25!$

c) Saura, Millares o Zóbel. 5 calendarios

R, NO, NI

$$CR_{3,5} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = 21$$

4/ 50 alumnos de 3
41 de 4
42 de 5

Todos en línea

a.1) Si van por edades?

NR, IO, IT

$P_m \cdot P_m \cdot P_m = P_{50} \cdot P_{41} \cdot P_{42} = 50! \cdot 41! \cdot 42! \cdot 3!$

a.2) Se mezclan

NR, IO, TI

$P_m = P_{133} = 133!$

b) 10 pequeñas => 8 , 8 medianas => 5 , 4 grandes => 4

R, NO, NI

R, NO, TI

$$\frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$

$$CR_{10,8} \cdot CR_{8,5} \cdot CR_{4,4} = \frac{17!}{8!\,9!} \cdot \frac{12!}{5! \cdot 7!} \cdot 1 = 19253...$$

5/ 6 amigos => 4

NR, NI, NO

$C_{6,4}$

7 amigas => 3 ¿Formas de elegirlos?

NR, NI, NO

$C_{7,3}$

b) En un banco sin chicos ni chicas juntos

NR, IO, IT

$P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3!$

$VR_{m,n} = m^n$

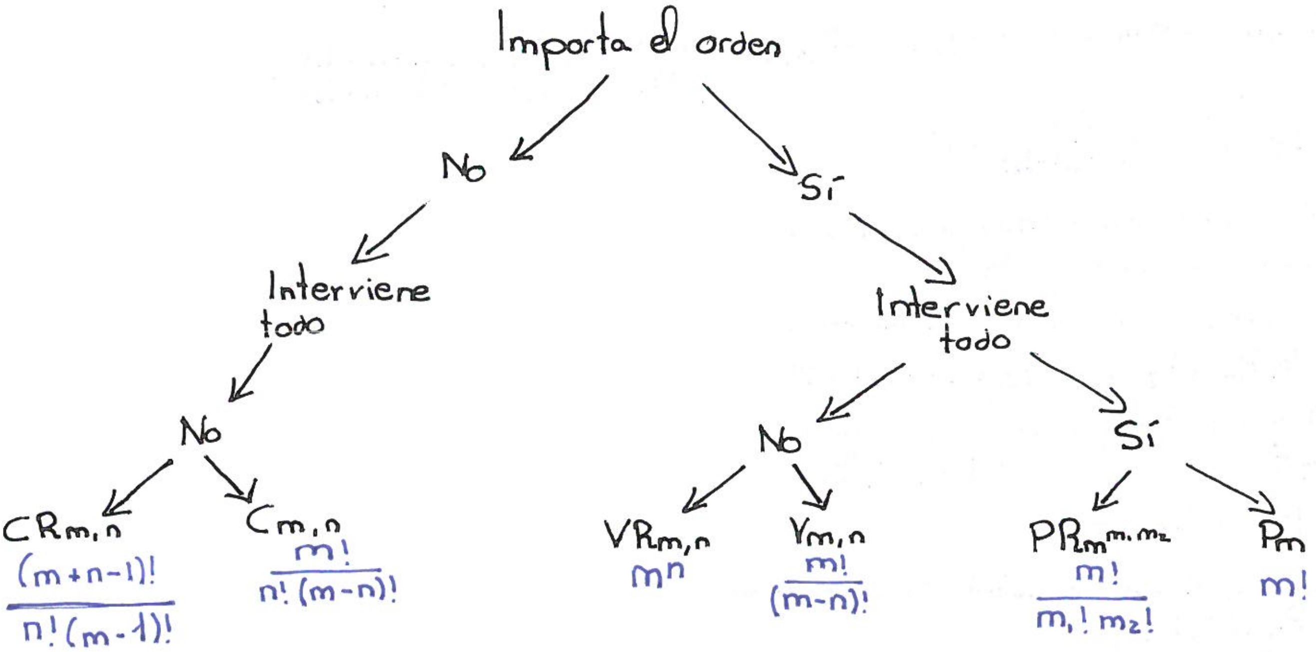
$P_m = m!$

$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

$PR_m^{m_1,m_2} = \frac{m!}{m_1!m_2!\dots!}$

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \binom{m}{n}$$

$$CR_{m,n} = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$$



1) Caja fuerte, 8 cifras ¿posibles combinaciones?

Repite, importa el orden y no todos los elem

$VR_{m,n} = VR_{10,8} = 10^8$

3) Grupos de 18 elementos, uno se repite 7 veces, otro 6 y otro 3

Repita, importa el orden y entran todos

$PR_{18}^{7,6,3,1,1} = \frac{18!}{7!\cdot6!\cdot3!\cdot1!\cdot1!} = 2\,940.....$

1) 10 días en Madrid para 5 museos. 3 al Prado, 3 al R.S., 2 arqueológico y 1 a cada uno

a) ¿Formas de ordenar las visitas?

Repite, importa el orden y entran todos

$PR_{10}^{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!\cdot3!\cdot2!\cdot1!\cdot1!} = 50400$ posibles

b) 3 monumentos más en 3 días

No repite, importa el orden y todos

$PR_{10}^{332}\cdot P_3 = 50400\cdot3!$

c) En el prado venden Goya, Velázquez y Murillo, son iguales y quiero 6

Repite, no importa el orden y no intervienen todos

$CR_{3,6} = \frac{(3+6-1)!}{6!\cdot(3-1)!} = 28$

Clase => Comportamiento en la vida real

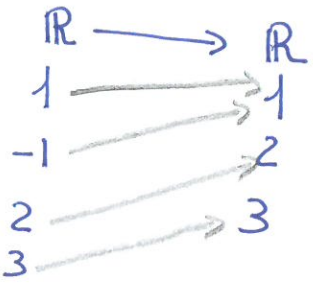
Atributos

Methods => acciones que puede hacer o recibir

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = |x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

a). Tipos de aplicaciones. Obtener $Im(f)$ y tipo de aplicación



Es aplicación pq $\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

En el ejercicio ↳ $\forall a \in \mathbb{R}, \exists! b \in \mathbb{R} / f(a) = b$

La imagen de $f(x)$ queda definida como

$Im(f) = \}f(a) / a \in A\{$

+ ¿Es inyectiva? —> Solo si $\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

↳ Si cada imagen tiene una única antiimagen

No lo cumple ya que $-1 \neq 1$ pero $f(1) = f(-1)$ por lo que no cumple la definición de inyectiva

+ ¿Es sobreyectiva? —> Solo si $\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

↳ Si todo elemento de B es imagen de A

No lo cumple ya que no existe la antiimagen del conjunto de elementos de $(-\infty, 0)$.

Para "arreglar" el ejercicio se debería poner el enunciado de forma que:

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$

$f(x) = |x|$ ó $f: (0, +\infty) \longrightarrow (0, +\infty)$

$f(x) = |x|$

Espacio muestral (E): Los posibles resultados -> sucesos elementales.

Suceso imposible: $\emptyset$

Suceso contrario: $\bar{A}$

1/ Dado

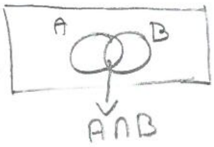
a) ¿E? $E = \{1,2,3,4,5,6\}$

b) A sacar par $E = \{2,4,6\}$ $\bar{A} = \{1,3,5\}$

c) A sacar múltiplo de A: $\{3,6\}$ $\bar{A} = \{1,2,4,5\}$

Operaciones en sucesos

1. Unión $A \cup B$
2. Intesección $A \cap B$
3. Sucesos incompatibles $A \cap B = \emptyset$



1/ Dado A sacar par B múltiplo de 3

a) $A \cup B = \{2,3,4,6\}$

b) $A \cap B = \{6\}$

Regla de Laplace

$$P(A) = \frac{n^o \text{casos favorables}}{n^o \text{casos totales}}$$

Suceso contrario ($P(\bar{A})$) -> $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

- Unión de sucesos

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Intersección de sucesos

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Leyes de Morgan

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$

Diferencias de sucesos

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

Probabilidad condicionada

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

1/ A y B son incompatibles $P(A) = 2/4$ $P(B) = 1/6$

x Son incompatibles x

a) $P(A \cap B) = 0$ b) $P(A \cup B)$: $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/4 + 1/6 - 0 = 7/18$

2/ $P(R) = 0'4$ $P(M) = 0'2$ $P(R \cap M) = 0'05$

a) ¿$P(\bar{R} \cap M)$?

$P(\bar{R} \cap M) = P(M) - P(A \cap B) = 0'2 - 0'05 = 0'15$

b) $P(\overline{M \cap N})$

$P(\overline{M \cap R}) = 1 - P(A \cup R) = 1 - 0'55 = 0'45$

$P(R \cup M) = P(R) + P(M) - P(R \cap M) =$

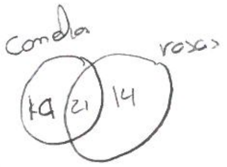
$= 0'4 + 0'2 - 0'05 = 0'55$

3/ $P(A) = 0'4$
$P(B) = 0'3$
$P(A\cap B) = 0'1$

a) Pasando A, prob de B
$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0'1}{0'4} = 0'25$

b) Pasando B, prob de A
$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0'1}{0'3} = 0'33$

4/ 40% camelias
35% rosas
21% las dos
1 al azar



a) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0'4 + 0'35 - 0'21 = 0'5$

b) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0'54 = 0'46$

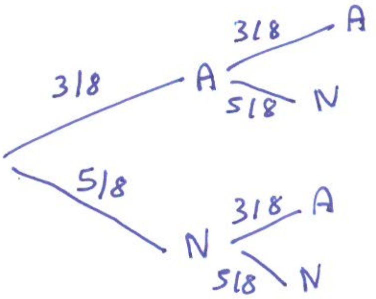
c) $P(C/R) = \frac{P(A\cap B)}{P(R)} = \frac{0'21}{0'35} = 0'6$

d) $P(R/C) = \frac{P(A\cap B)}{P(C)} = \frac{0'21}{0'4} = 0'525$

e) $P(R\cap\overline{C}) = P(R) - P(R\cap C) = 0'35 - 0'21 = 0'14$

- Diagramas de árbol con devolución

1) 3 bolas amarillas, 5 negras. Cogemos 2. Prob de



a) Las 2 amarillas
$P(A\cap A = 3/8 \cdot 3/8 = 9/64$

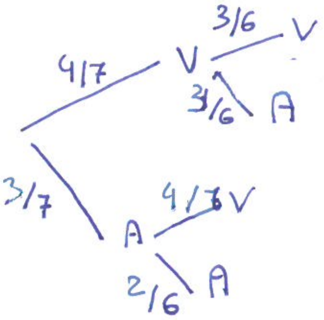
b) Las 2 negras
$P(A\cap A) = 5/8 \cdot 5/8 = 25/64$

c) Mismo color
$P(A\cup B) = 3/8 \cdot 3/8 + 5/8 \cdot 5/8 = 17/32$

d) Distinto
$P = 5/8 \cdot 3/8 + 5/8 \cdot 3/8 = 15/32$

- Diagramas de árbol sin devolución

1/ 4 bolas verdes 3 bolas azules. Cogemos 2. Prob de:



a) Los dos verdes
$4/7 \cdot 3/6 = 2/7$

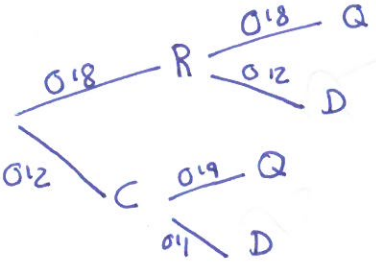
b) Las dos azules
$3/7 \cdot 2/6 = 1/7$

c) Mismo color
$4/7 \cdot 3/6 + 3/7 \cdot 2/6 = 3/7$

d) Dist color
$4/7 \cdot 3/6 + 3/7 \cdot 4/6 = 4/7$

Prob total

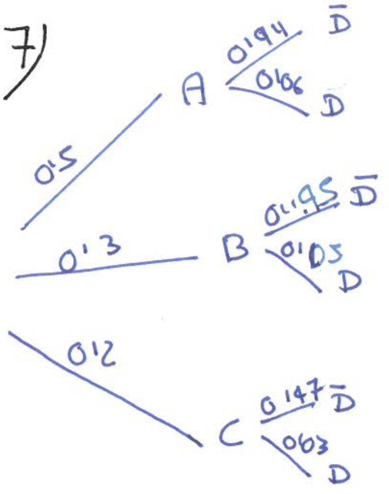
1/ 80% ropa, 20% complementos
↳ 20% se devuelven
↪ 10% se devuelven



a) Ropa y se devuelva
$P(R\cap D) = 0'8 \cdot 0'2 = 0'16$

b) Sea devuelta
$0'8 \cdot 0'2 + 0'2 \cdot 0'1 = 0'18$

7)



a) Pos defectuosa

$0'5 \cdot 0'0'6 + 0'3 \cdot 0'05 + 0'2 \cdot 0'03 = 0'051$

b) $P(A/D) \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{0'5 \cdot 0'06}{0'05 \cdot 0'06 + 0'3 \cdot 0'05 + 0'2 \cdot 0'03}$

$= 0'588$

6) En cajas de 5

a) 3 resistencias de B

$B(5, 0'3) = \binom{5}{3} \cdot 0'3^3 \cdot 0'7^2 = 0'1323$

b) Al menos dos hechos por B

$B(5,0,3) \to P(X \geq 2) \to 1 - P(X=0) + P(x)=1) = 0'47178$

$P(x=0) = \binom{5}{0} \cdot 0'3^0 \cdot 0'7^5 = 0'16807$

$P(X=1) = \binom{5}{1} \cdot 0'3^1 \cdot 0'7^4 = 0'36015$

1/ 5% morosos. ¿Prob de al menos 1 entre 10?

$B(10, 0'05)$. $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0'5987 = 0'401$

$P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot 0'05^0 \cdot 0'95^{10} = 0'5987$

2/ 10% huevos rotos. ¿Prob de como mucho 1 en 12?

$B(6, 0'1)$ $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \binom{6}{0} \cdot 0'1^0 \cdot 0'9^6 + \binom{6}{1} \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^5 =$

$= 0'5313 + 0'3543 = 0'8857$

3/ Aprueba 80%, de 8, aprobar 6?

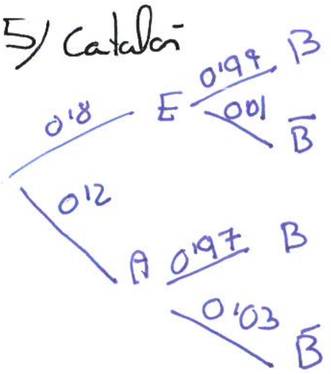
$B(8, 0'8)$ $P(X=6) = \binom{8}{6} \cdot 0'8^6 \cdot 0'2^2 = 0'2936$

4/ Prob romper = 0'01. Hay 10. Al menos 1

$B(10, 0'01)$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0'9043 = 0'09561$

$P(X=0) = \binom{10}{0} \cdot 0'01^0 \cdot 0'99^{10} = 0'9043$

5/ Cataluña

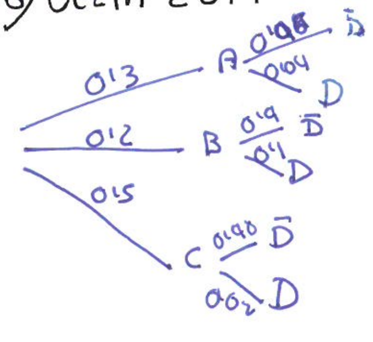


a) Prob defecto

$P_{defect} = 0'8 \cdot 0'01 + 0'2 \cdot 0'03 = 0'014$

b) $P(E/\bar{B}) = \frac{P(E \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0'8 \cdot 0'01}{0'8 \cdot 0'01 + 0'2 \cdot 0'03} = 0'5714$

6/ UCLm 2019



a) No defectuoso

$0'3 \cdot 0'96 + 0'2 \cdot 0'9 + 0'5 \cdot 0'98 = 0'958$

b) $P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0'5 \cdot 0'02}{0'5 \cdot 0'02 + 0'2 \cdot 0'1 + 0'3 \cdot 0'04} =$

$= 0'27$ de D

16 chicas 4 chicos. Cada día una. P en 5 días de

$P(♀) = \frac{16}{20} = 0'8$

$P(♂) = \frac{4}{20} = 0'2$

a) 3 chicas

$B(5, 0'8) = \binom{5}{3} \cdot (0'8)^3 \cdot 0'2^2 = 0'2048$

b) Al menos 3 chicas

$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = 0'2048 + \binom{5}{4} \cdot 0'8^4 \cdot 0'2^1 = 0'6144$

Distribución Binomial

1º/ n = nº de veces repetido

2º/ Mismos pro de éxito (p) y fracaso (q) → $q = 1 - p$

$B(n, p)$ ↳ éxito

Media	Varianza	Desviación típica
$\mu = n \cdot p$	$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q$	$\sigma = \sqrt{npq}$

1/ $\binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10$

$$p(x=k) = \frac{n}{k}\, p^k \; q^{n-k}$$

n = pruebas
k = éxitos
p = prob éxito
q = prob fracaso

1/ Prob = 0'5. Tira 6 veces

a) Prob de 4 aciertos

$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$; $P(x=4) = \binom{6}{4}\, 0'5^4 \cdot 0'5^2 = 0'234$

b) Las 6

$P(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$; $P(x=6) = \binom{6}{6}\, 0'5^6 \cdot 0'5^0 = 0'007$

c) Las 0

$p(x=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{6}{0}\, 0'5^0 \cdot 0'5^6 : 0'015$

2) Marca 85%. Lanza 8

a) Marque más de 6

$P(X > 6) \to P(X=7) + P(X=8)$

$P(X=7) = \binom{8}{7} \cdot 0'85^7 \cdot 0'15^1 + \binom{8}{8} \cdot 0'85^8 \cdot 0'15^0 = 0'6571$

b) Marque al menos 6

$P(x \geq 6) \to P(X=7) + P(X=6)$

$P(x \geq 6) = 0'6571 + \binom{8}{6}\, 0'85^6 \cdot 0'15^2 = 0'8947$

3) $p = 1/4$. Tira 5 veces

a) Prob más 2

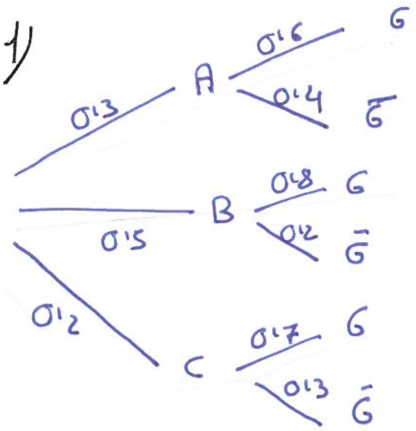
$P(x \geq 2) \to P(x=1) + P(X=2) + P(X=0) = \binom{5}{1} \cdot 1/4^1 \cdot 3/4^4 + \binom{5}{2}\, 1/4^2 \cdot 3/4^3 + \binom{5}{0}\, 0'1/4^0 \cdot 3/4^5 =$
$= 0'3955 + 0'2657 + 0'2373 = 0'8965$

b) Algún gol

$P(x \geq 1) \to 1 - P(x \neq 0) = 1 - 0'2373 = 0'7627$

Teorema de Bayes $P(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

1)



a) Prob de ganar el caso

$0'3 \cdot 0'6 + 0'5 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'7 = 0'72$

b) Si ha ganado, prob de que fuera con A

$$P(A/G) = \frac{P(A\cap G)}{P(G)} = \frac{0'3 \cdot 0'6}{0'3 \cdot 0'6 + 0'5 \cdot 0'8 + 0'2 \cdot 0'7} = \frac{0'18}{0'72} =$$

$= 0'25$

c) se ha perdido, prob de que fuera con c

$$P(C/\bar{G}) = \frac{P(C\cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{0'2 \cdot 0'3}{0'2 \cdot 0'3 + 0'3 \cdot 0'4 + 0'5 \cdot 0'2} = 0'21$$

1) De 30, 18 aprueban A, 16 aprueban B y 6 ninguna

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)+P(B)-P(A\cup B)}{P(A)} = \frac{0'6 + 0'53 - 0'8}{0'6} = 0'55$$

$P(A) = \frac{18}{30} = 0'6$

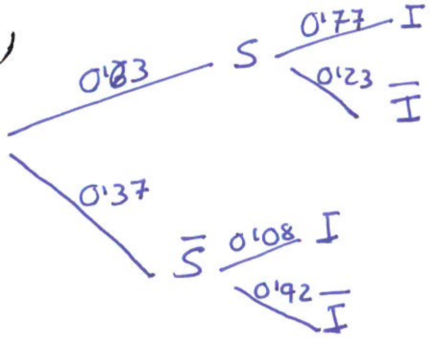
$P(B) = \frac{16}{30} = 0'53$

$P(\bar{B}\cap\bar{A}) = 6/30 = 0'2$

$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - (P(A\cup B)$

$0'2 = 1 - $ ~~; $P(A\cup B) = 0'8$

2)



a) Prob habitual a internet por móvil

$0'63 \cdot 0'77 + 0'37 \cdot 0'08 = 0'5147$

b) Si se conecta a internet ¿S?

$$P(S/I) = \frac{P(I\cap S)}{P(I)} = \frac{P(I) + P(S) - P(I\cup S)}{P(I)}$$

$$= \frac{0'77 \cdot 0'63}{0'77 \cdot 0'63 + 0'37 \cdot 0'08} = 0'9425$$

6/ a) 40 cartas, 5 cartas a 2 jugadores, formas? $\frac{m!}{n!(m-n)!}$

NO, NR, NT

$C_{40,5} \cdot C_{35,5} = \frac{40!}{5!\,35!} \cdot \frac{35!}{5!\,30!}$

b) De los que quedan, 10 en fila

NR, NT, 10 $\frac{m!}{(m-n)!}$

$V_{30,10} = \frac{30!}{20!} = 3628800$

c) Antes con repeticion

CR, NT, 10

$VR_{30,10} = 30^{10}$

7/ 4 tipos de vacuna, 3,2,3,4. Dif días

a) ¿Cuántas formas dará la cita?

R, IT, 10 $\Rightarrow P_R = \frac{12!}{3!\,2!\,3!\,4!} = 277200$

b) 22 letras => 2 dif 10 digitos => 3 dif $\frac{m!}{(m-n)!}$

NR, NO, NT NR NO, NT

$C_{22,2} \cdot C_{10,3} = \frac{22!}{(20)!} \cdot \frac{10!}{7!}$

c) 2 letras y 3 cifras con rep $VR = m^n$ c.2/ Sin rep $V = \frac{m!}{(m-n)!}$

R, 10, NT

$VR_{22,2} \cdot VR_{10,3} = 22^2 \cdot 10^3$ $V_{22,2} \cdot V_{10,3} = \frac{22!}{20!} \cdot \frac{10!}{7!}$

d) Todas las dosis posibles, pero hay 5, de qué forma? $CR = \frac{(m+n-1)!}{n!(m-1)!}$

RNO, NT

$CR_{5,4} = \frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$

4/ a) Vocalista, voz y 3 coro. 100 personas

3/ Divide

a) $1112^{873} \,\underline{|\, 9}$ $\Rightarrow$ $1112 \,\underline{|\, 9}$

5   123

$1112 \equiv 5 \pmod 9$

$1112^{873} \equiv 5^{873} \pmod 9$

$5^0 = 1 \equiv 1$

$5^1 = 5 \equiv 5$

$5^2 = 25 \equiv 7$

$5^3 = 5^2 \cdot 5 \equiv 7 \cdot 5 = 35 \equiv 8$

$5^4 = 5^3 \cdot 5 \equiv 8 \cdot 5 = 40 \equiv 4$

$5^5 = 5^4 \cdot 5 \equiv 4 \cdot 5 = 20 \equiv 2$

$5^6 = 5^5 \cdot 5 \equiv 2 \cdot 5 = 10 \equiv 1$

$873 = 6 \cdot 145 + 3$

$5^{873} = 5^{6 \cdot 145 + 3} = (5^6)^{145} \cdot 5^3 \equiv 1^{145} \cdot 8 = 8$ (moc

4/ Inverso de $\overline{566}$ en $\mathbb{Z}_{1975}$

m.c.d$(1975, 566) = $ mcd$(566, 277) = $ mcd$(277, 12) = 1$

$1975 \,\underline{|\, 566}$ — 277   3

$566 \,\underline{|\, 277}$ — 12   2

$277 \,\underline{|\, 12}$ — 1   23

$12 \,\underline{|\, 1}$ — 0   12

$1975 = 566 \cdot 3 + 277$

$277 = 1975 - 566 \cdot 3$

$566 = 277 \cdot 2 + 12$

$12 = 566 - 277 \cdot 2$

$277 = 12 \cdot 23 + 1$

$1 = 277 - 12 \cdot 23$

$1 = 277 - 12 \cdot 23$; $1 = 277 - (566 - 277 \cdot 2) \cdot 23$; $1 = 277 + 566 \cdot (-23) + 277 \cdot 46$

$1 = 1975 + 566(-3) + 566(-23) + 1975 \cdot 46 + 566 - 138$

$1 = 1975 \cdot 47 + 566 \cdot (-164)$

$\overline{1} = \underbrace{\overline{1975} \cdot \overline{47}}_{0} + \overline{566} \cdot \overline{(-164)}$

$\hookrightarrow \overline{1975} - \overline{164} = \overline{1811}$

3/ a) m.c.d$(267, 126)$

$267 \,\underline{|\, 126}$ — 15   2

$126 \,\underline{|\, 15}$ — 6   8

$15 \,\underline{|\, 6}$ — 3   2

$6 \,\underline{|\, 3}$ — 0   2

$276 = 126 \cdot 2 + 15$

$15 = 276 - 126 \cdot 2$

$126 = 15 \cdot 8 + 6$

$6 = 126 - 15 \cdot 8$

$15 = 6 \cdot 2 + 3$

$3 = 15 - 6 \cdot 2$

$3 = 15 - 6 \cdot 2$; $3 = 15 - (126 - 15 \cdot 8) \cdot 2$; $3 = 126 \cdot (-2) + 15 \cdot 16$; $3 = 126 \cdot (-2) + (276 - 126 \cdot 2) \cdot 16$

$3 = 126 \cdot (-2) + 276 \cdot 16 + 126 \cdot (-32)$; $3 = 267 \cdot 17 + 126 \cdot (-36)$

b) Tiene solución la ec. diofántica $267x + 126y = 6$. Todas las sol.

$6 | 3$ por lo que tiene solución $\cdot 3$

$267 \cdot 17 + 126(-36) = 3$; $267 \cdot 34 + 126 \cdot (-72) = 6$

$x = x_0 + b/d \cdot k$ $x = 34 + 267/6 \cdot k$

$y = y_0 - a/d \cdot k$ $y = -72 - 126/6 \cdot k$

Euclides:

$m.c.d(224,71)=1$; $mcd(224,71)=mcd(71,11)=m.cd(11,5)=m.c.d(5,1)=1$

$\begin{array}{l|l} 224 & \underline{71} \\ 11 & 3 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 71 & \underline{11} \\ 5 & 6 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 11 & \underline{5} \\ 1 & 2 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 5 & \underline{1} \\ 0 & 5 \end{array}$

$224=71\cdot3+11$ $\quad 71=6\cdot11+5$ $\quad 11=5\cdot2+1$

Bezout: $\exists x,y\in\mathbb{Z}/224x+71y=5$

$11=224-71\cdot3$ $\quad 5=71-6\cdot11$ $\quad 1=11-5\cdot2$

$1=11-(71-6\cdot11)\cdot2$; $1=11-71\cdot2+\overset{12}{6\cdot2}\cdot11$; $1=224-71\cdot3-71\cdot2+12\cdot(224-71\cdot3)$

$1=224-71\cdot3-71\cdot2+224\cdot12-71\cdot36$; $1=224\cdot13-71\cdot41$; $224\cdot13+71\cdot(-41)=1$

$\boxed{x=x_0+\frac{b}{d}\cdot k}$; $\boxed{y=y_0-\frac{a}{d}k}$

$x=13+224/1\cdot k$ $\quad y=-41-71/1\cdot k$

Euclides:

$m.c.d(42878,2673)=11$; $m.c.d(2673,110)=mcd(110,33)=mcd(33,11)=11$

$\begin{array}{l|l} 42878 & \underline{2673} \\ 110 & 16 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 2673 & \underline{110} \\ 33 & 24 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 110 & \underline{33} \\ 11 & 3 \end{array}$ $\quad\begin{array}{l|l} 33 & \underline{11} \\ 0 & 3 \end{array}$

$42878=2673\cdot16+110$ $\quad 2673=110\cdot24+33$ $\quad 110=33\cdot3+11$

Bezout: $\exists x,y\in\mathbb{Z}/42878x+2673y=11$

$110=42878-2673\cdot16$ $\quad 33=2673-110\cdot24$ $\quad 11=110-33\cdot3$

$11=110-33\cdot3$; $11=110-(2673-110\cdot24\cdot3)$; $11=110+2673(-3)+110\cdot72$

$11=42878+2673(-16)+2673-3+[42878+2673(-16)]72$;

$11=42878+2673\cdot(-19)+42878\cdot72+2673(-1152)$;

$11=42878+2673\cdot(-1171)$

$11=42878\cdot73+2673\cdot(-1171)$

$x=x_0+b/d\cdot k$ $\quad y=y_0-a/d\cdot k$

$x=73+42878/11k$ $\quad y=-1171-2673/11\cdot k$

Inveso: ¿Existe el inveso de $\overline{71}$ en $\mathbb{Z}_{224}$?

Tomado de la ecuació diofántica anterior donde $224\cdot13+71\cdot(-41)=1$

$\hookrightarrow \overline{224}\cdot\overline{13}+\overline{71}\cdot\overline{(-41)}=\overline{1}$

$\hookrightarrow 0+\overline{71}\cdot\overline{(-41)}=1$

$\hookrightarrow$ Inveso de $71=-41$ $\nearrow$ $\overline{224}-\overline{41}=\overline{183}$

c) ¿Tiene solució la ec. congruencias $126x\equiv5\ (mod\ 267)$?

$mcd(267,126)\,\underline{|5}$

No es divisor

5/ 12 camisas (6 blancas, 6 azules y 2 amarillas) Mujer: 15 camisas todas diferentes

a) De cuántas formas todas las camisas

10, IR, IT $PR_{14}^{662} = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_3!} = \frac{14!}{6! \cdot 6! \cdot 2!} = 84084$

b) ¿De cuántas formas la mujer?

10, IT, NP

$P = m! = 15!$

c) Armario mayor (todas juntas), primero él y luego los de ella

10, R, IT · 10, IT, NR

$PR_{14}^{662} \cdot P_{15} = \ldots$

¿Y si no importa el orden?

IT, R, 10

$PR_{27}^{662111} = \ldots$

8/ ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden hacer con el 0, 1, 2, 3, 4, 5 si

a) Todos deben de ser iguales

10, NI, NR

$V_{6,3} = \frac{6!}{3!} =$

9/ Con 8 bolas sacamos 5

a) No hay reposición $V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$

10, NT, NR

$V_{85} = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$

b) Hay reposición $VR = m^n$

10, NT, R

$VR = 8^5 = 32768$

¿Y si sacamos todas a la vez?

NO, NT, NR $C = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$C_{8,5} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$

10/ 4 dígitos + 3 letras sin ñ ni q $\rightarrow 20$ $VR = m^n$

10, NT, R 10, NT, R

$VR_{10,4} \cdot VR_{20,3} = 10^4 \cdot 20^3$

11/ 7 hombres, 6 mujeres

a) ¿De cuántas formas

10, NR, IT $\Rightarrow P_{13} = 13!$

b) Y si los hombres en los impares

10, NR, TI 10, NR, TI

$P_7 \cdot P_6 = 7! \cdot 6!$

Congruencia:

$a \equiv b \pmod{n}$ si el resto $a/n = b/n$

¿ $7 \equiv 17 \pmod{5}$?

$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 17 & 5 \\ \hline \boxed{2} & 3 \end{array}$

El mismo

Inversos:

$\mathbb{Z}_{10}$, inversos? $\Rightarrow a \cdot x \equiv 1 \pmod{n} \} \bar{0}, \bar{1}, \bar{2} \quad \bar{9} \{$ $\Rightarrow 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71$

$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ $\quad \bar{1}^{-1} = 1$

2 no

$\bar{3} \cdot \bar{7} = \overline{21} = \bar{1}$ $\quad \bar{3}^{-1} = \bar{7}$

4 no

5 no

6 no

8 no

$\bar{9} \cdot \bar{9} = \overline{81} = \bar{1}$

Si $\mathbb{Z}_p$, p es primo => todos tienen inverso

Resolver $10x \equiv 15 \pmod{55}$

m.c.d$(10, 55) = 5$ y $5 | 15$ entonces tiene sol

$\frac{10}{5} x \equiv \frac{15}{5} \pmod{55/5}$; $2x \equiv 3 \pmod{11}$ y tiene 1 sol pq mcd$(2, 11) = 1$

$\hookrightarrow \cdot (6) = 12x \equiv 18 \pmod{11}$

$1x \equiv 7 \pmod{11}$

$x_0 \equiv 7 \pmod{11}$

$\bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ en $\mathbb{Z}_{11}$ $\rightarrow 1, 12, \ldots$

$\bar{2} \cdot \bar{6} = \overline{12} = \bar{1}$

$x \equiv 7 + 55/5\, k \pmod{55}, \forall k = 0, 1, 2, 3, 4$

$x \equiv 7, 18, 29, 40, 51$

Resolver $1921x \equiv 2260 \pmod{2486}$

m.c.d$(1921, 2486) = 113$ $\quad$ $2260 | 113$ entonces tiene sol.

$\frac{1921}{113} x \equiv \frac{2260}{113} \pmod{\frac{2486}{113}}$; $17x \equiv 20 \pmod{22}$ y tiene 1 sol pq mcd$(17, 22) = 1$

$\bar{17} x \equiv 1 \pmod{22} \} 0, 1 \ldots 21 \{$ $= 23, 45, 67, 89 / 111, 133, 155, 177, 199, 221, 243$

$\overline{17} \cdot \overline{13} = \bar{1}$

$\hookrightarrow \cdot 13 = 221x \equiv 260 \pmod{22}$

$x \equiv 18 \pmod{22}$

$x \equiv 18 + 2486/113\, k \pmod{2486} \forall 0, 1 \ldots$

c) Para $a = 0$

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \qquad & x &= 0 \\ z &= 1 & y &= 0 \\ 2x+y+z &= 1 & z &= 1 \end{aligned}$$

$E = \}(0,0,1)\{ \; ; \; E = (0,0,1) + \}(0,0,0)\{$

2/ $B = \}v_1, v_2, v_3\{$

$W = \langle v_1 + v_2 + av_3, \; -v_2 + av_3, \; av_1 + 8v_3)$

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

$(1,1,a)_B \qquad (0,-1,a)_B \qquad (a,0,8)_B$

$S = \}(1,1,a)_B, (0,-1,a)_B, (a,0,8)_B\{$

$Rg(S) = Rg(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & -1 & a \\ a & 0 & 8 \end{vmatrix} = 2a^2 \mp 8 ; \quad a = +-2$

- Caso 1: Si $a \neq -2, 2$

$Rg(A) = 3 = Rg S, \; Dim\, W = 3$

- Caso 2: Si $a = -2$

$Rg(A) = 2 = Rg(S) \; ; \; Dim(W) = 2$

Solo 2 bases LI

- Caso 3: Si $a = 2$

$Rg(A) = 2 = Rg S \; ; \; Dim\, W = 2$

b) para $a = 1$ en $v = v_1 - v_2 - 3v_3$ pert a W y dar coords de V en base B

$\Downarrow$

B: $v = (1,-1,-3)$

$(1,-1,-3) = x(1,1,1) + y(0,-1,1) + z(1,0,8)$

$$\left.\begin{aligned} x + z &= 1 \\ x - y &= -1 \\ x + y + 8z &= -3 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

1/ $$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} x + y + az = a \\ ax + ay + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{matrix} \right\}$$

a) ¿Dim(E)? ¿Es subespacio en algún caso?

↳ Si es SI ⇒ $E = \emptyset$

↳ $E = v + W$ y $Dim(W) = Dim(E)$

$$Det|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2; \; a = +-1$$

- Caso 1: $a \neq 1, -1$

$Rg = 3$ nº param: Incog - Rg = 3-3 = 0

↳ SCD

- Caso 2: $a = 1$

Si $a = 1$; $Rg(A) = 2$ y $Rg(A^*) = 2$ ⇒ SCI

nº param: Incog - Rg = 3-2 = 1

↳ Dim(E) = 1

- Caso 3: $a = -1$

$Rg(A) = 2$ y $Rg(A^*) = 2$ ⇒ SCI

3-2 = 1 y Dim E = 1

b) $a = -1$; base de E y todas las ec.

↳ Hay 2 ec. LI

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{matrix} -x - y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{matrix} \right\}$$

↳ $F_2 = F_2 + 2F_1$ ⇒ $\begin{matrix} -x - y + z = 1 \\ 0 - y + 3z = 3 \end{matrix}$

1 parámetro ⇒ $\boxed{z = \alpha}$

$\boxed{y = 3\alpha - 3}$

$-x = 1 - z + y = 1 - \alpha + 3\alpha - 3$

$= -1 - 2\alpha + 3 = \boxed{-2\alpha + 2 = x}$

$E = \{(2 - 2\alpha, -3 + 3\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} = (2, -3, 0) + \{(-2\alpha + 3\alpha + \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\} =$

$= (2, -3, 0) + \{\alpha(-2, 3, 1) / \alpha \in \mathbb{R}\} = (2, -3, 0) + \langle(-2, 3, 1)\rangle$

↳ W = B

Ec vect: $(x,y,z) = (2,-3,0) + t(-2,3,1)$

Ec param: $x = 2 - 2\alpha$

$y = -3 + 3\alpha$

$z = \alpha$

3/. $\mathbb{R}_2[x]$ $W = \langle a + x + x^2, 2 + 2x, 1 + x^2 \rangle$

$(a,1,1)_B$ $(2,2,0)_B$ $(1,0,1)_B$

$S = \}(a,1,1)_B, (2,2,0)_B, (1,0,1)_B\{$

$$\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 0 + 0 - (2 + 0 + 2); \ a = 2$$

Caso 1; $a = 2$

Caso 2; $a \neq 2$

b) Para $a = 0$; $p(x) = 1 + 4x + x^2$ pert a W

$\Downarrow$

$(1,4,1)$

$(1,4,1) = x(0,1,1) + y(2,2,0) + z(1,0,1)$

$2y + z = 1$ $z = 1 - 2y$ $z = -1$

$x + 2y = 4$ $2y + 2y = 4; \ y = 1$

$x + z = 1$

$x + 1 - 2y = 1; \ x = 2y$ $x = 2$

Ejer 4/ $B = \}v_1, v_2, v_3, v_4\{$

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\alpha + \beta + a\gamma \\ y &= \alpha + \beta + a\gamma \\ z &= a\beta + \gamma \\ t &= a\beta + \gamma \end{aligned}\right\} \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

LD <

$E = (0,0,0,0)$, $\}\alpha(2,1,0,0) + \beta(1,1,a,a) + (a,a,1,1)\{$

2) $B = \} v_1, v_2, v_3 \{$

$W = \langle a v_1 + 2 v_2 + v_3 , v_1 + 2 v_2 , v_1 + v_3 \rangle$

a) Dim y base B' de W

$(a, 2, 1)_B$

$(1, 2, 0)_B$

$(1, 0, 1)_B$

$S = \} (a, 2, 1)_B , (1, 2, 0)_B , (1, 0, 1)_B \{$

$$Det(A) = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 0 + 0 - (2 + 0 + 2) =$$

$$= 2a - 4 = a = 4/2 = 2$$

- Caso 1 : $a \neq 2$

  $Det(A) = 3 = Det(S) = 3$; $Dim(W) = 3$

- Caso 2 : $a = 2$

  $Det(A) = 2 = Det(S)$; $Dim(W) = 3$

b) Para $a = 0$, $v = -v_1 + 3 v_3$ pertenece a W

$\hookrightarrow (-1, 0, 3)$

$(-1, 0, 3) = x (0, 2, 1) + y (1, 2, 0) + z (1, 0, 1)$

$y + z = -1$

$2x + 2y = 0$

$x + z = 3$

$y = -1 - z$ $\quad$ $y = a - 2$

$2x = +2 + 2z$; $x = 1 + z$ $\quad$ $x = 2$

$1 + z + z = 3$; $z = 1$

$E = \}(2-2\alpha-4\beta, 1+\alpha+2\beta, 1+\alpha+2\beta, 6+\alpha+2\beta)/\alpha,\beta \in \mathbb{R})$

$E = (2,1,1,6) + \}\alpha(-2,1,1,1) + \beta(-4+2+2+2)\{$

$W = < \underbrace{(-2,1,1,1), (-4,2,2,2)}_{LD} >$

$\text{Dim}(W) = 1 = \text{Dim}(E)$

$\text{Dim } E = \text{Dim}(V) - n^{o}ec$

$X = 2 - 2\alpha$

1) $E = \}(1+\alpha+(a-1)\beta+2\gamma, 2+\alpha+a\beta+\gamma, 2+a\alpha+(a+1)\beta, 2+a\alpha+(a+1)\beta)/\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$

$E = (1,2,2,2) + \}\alpha(1,1,a,a) + \beta([a-1]+a+[a+1]+[a+1]) + \gamma(2,1,0,0)$

$W = < (1,1,a,a), [(a-1), a, (a+1), (a+1)], (2,1,0,0) >$

1 $\text{Dim}(E) = \text{Dim}(W)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a-1 & a & a+1 & a+1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1/ $\mathbb{R}^4$

$$x, y, z, t \in W \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta + 2\gamma + \delta + \lambda \\ y = \alpha + 2\beta + 3\gamma + \lambda \\ z = 2\alpha + 3\beta + 5\gamma + \delta + 2\lambda \\ t = \alpha - \beta + 3\delta + \lambda \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}}$$

$= \} \alpha (1,1,2,1) + \beta (1,2,3,-1) + \gamma (2,3,5,0) + \delta (1,0,1,3) + \lambda (1,1,2,1) / \alpha, \beta, \gamma, \delta \in$

$= < (\quad) \ldots \quad \dashrightarrow \quad 2 \text{ LI}$

$B = \} (1,1,2,1), (1,2,3,-1)$

$x = \alpha + \beta$

$y = \alpha + 2\beta$

$z = 2\alpha + 3\beta$

$t = \alpha - \beta$

$$A = \left| \begin{matrix} x & y & z & t \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{matrix} \right|$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & a \\ 0 & 6 & a \\ 3 & b & 1 \end{pmatrix} \qquad B: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a-1 \end{pmatrix}$$

i) Det A

$$\begin{vmatrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = 2b + 3ba + 0 - (3ab + 2ab + 0)$$

$$= 2b - 2ba = 2b(1-a)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{b=0} \quad \boxed{a=1}$$

Det(A|B) = No sepuede porque es 3x4

Rg(A)

Si $a \neq 1$ y $b \neq 0$; $Rg(A) = 3$

Si $a = 1$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$$\begin{vmatrix} 2 & b & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 3 & b & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow Rg\,2$$

Si $b = 0$ y $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 2a$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} = 0$$

$\rightarrow$ Si $a \neq 0$ $\begin{vmatrix} 2 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} \neq 0$

Si $a = 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$

$Rg(A) = 2$

etc etc etc

$R_g\ (A|B)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 3 & 0 & 1 & (a-1) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 & a & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 3 & 1 & (a-1) \end{matrix}\Bigg)$$

etc etc etc

$AX = B$

$\hookrightarrow X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{matrix} 2 & b & a \\ 0 & b & a \\ 3 & b & 1 \end{matrix}$$

$A^{-1} = \dfrac{(Adj\,A)^T}{|A|}$

$$\begin{pmatrix} (b-ab) & -3a & -3b \\ b- & 2-3a & -b \\ 0 & 2a & 2b \end{pmatrix} \xRightarrow{T} \begin{pmatrix} (b-ab) & -b & 0 \\ -3a & 2-3a & 2a \\ -3b & -b & 2b \end{pmatrix}$$

$A^{-1} = \dfrac{(Adj\,A)^T}{|A|}$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{b(1-a)}{2b(1-a)} & \dfrac{-b}{2b(1-a)} & \dfrac{0}{2b(1-a)} \\ \dfrac{-3a}{2b(1-a)} & \dfrac{2-3a}{2b(1-a)} & \dfrac{2a}{2b(1-a)} \\ \dfrac{-3b}{2b(1-a)} & \dfrac{-b}{2b(+1-a)} & \dfrac{2b}{2b(1-a)} \end{pmatrix}$$

$$E = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{array}{rrrcr} x & +y & +2z & = & 4 \\ -x & +y & +3z & = & 3 \\ x & +5y & +12z & = & 18 \\ -5x & -y & & = & -6 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 12 & 18 \\ -5 & -1 & 0 & -6 \end{array}$$

$F_3 = F_3 - F_1$

$F_4 = F_4 + 5F_1$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 4$

$-1 \quad 1 \quad 3 \quad 3$

~~0 4 10 14~~

~~0 4 10 14~~

$\Rightarrow \begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 7 \end{array}$

↳ $x + y + 2z = 4$

$2y + 5z = 7$

$x + y + 2z = 4 \;;\; x + y = 4 - 2\alpha$

$2y + 5z = 7 \;;\; 2y = 7 - 5\alpha \;;\; y = 7/2 - 5/2\,\alpha$

$z = \alpha$

$x + 7/2 - 5/2\,\alpha = 4 - 2\alpha \;;\; x = 1/2 + 1/2\,\alpha$

$E = \{ (1/2 - 1/2\,\alpha,\ 7/2 - 5/2\,\alpha,\ \alpha) / \alpha \in \mathbb{R} \}$

↳ $(1/2, 7/2, 0) + (+1/2\,\alpha, -5/2\,\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R} \}$

✧ Subespacio generado por un conjunto de vectores

✧ Base de un espacio vectorial

1/ $B = \{(1,1,2), (1,4,3), (1,0,1)\}$, coords del vector $v = (3,2,1)$

$(3,2,1) = \lambda(1,1,2) + \alpha(1,4,3) + \beta(1,0,1) \Rightarrow (3,2,1) = (\lambda + \alpha + \beta, \lambda + 4\alpha + 0, 2\lambda + 3\alpha + \beta$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda + \alpha + \beta = 3 \\ \lambda + 4\alpha = 2 \\ 2\lambda + 3\alpha + \beta = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 - 2F_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_1]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_3]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \alpha = 2$$

2/ $S = \{2 + x + 6x^4, 1 + 7x^3 + 5x^4\}$ ¿Libre o ligado?

$B = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

$2 + x + 6x^4 = 2\cdot 1 + 1\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3 + 6\cdot x^4 = (2,1,0,0,6)$

$1 + 7x^3 + 5x^4 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 5\cdot x^3 + 5\cdot x^4 = (1,0,0,7,5)$ Libres

3/ $B = \{v_1, v_2, v_3\}$

$$S = \{\underset{(1,0,1)_B}{v_1 + v_3}, \underset{(2,1,1)_B}{2v_1 + v_2 + v_3}, \underset{(3,1,-1)}{3v_1 + v_2 - v_3}\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow 3 \neq 0 \quad \text{Libre} \quad \underset{F_3 = F_3 - F_1 - F_2}{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

✧ Dimensión

↳ Espacio vectorial v [(dim (V)] al nº de elementos de cualquiera de sus bases

$E = V + W \Rightarrow$ Dim de la variedad E, $\dim(E) = \dim(W)$

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$
- $\dim(\mathcal{M}_{m\times n}\mathbb{R}) = m \cdot n$
- $\dim(V)$ es el máximo nº de vectores linealmente independiente.

1/ V= esp vectorial base $B = \} v_1, v_2 \ldots, v_n \{$

¿Dimensión? => Trianglar

$V = B = \} v_1, v_2, \ldots, v_n \{$

$V_1 \neq 0$ porque si uno es nulo es linealmente indp.

Subespacio W

mismo elemento de coords y base

2/ W de $\mathbb{R}^4$ por el sistema $S = \} (1,1,2,3), (1,0,0,1), (-1,2,4,3), (2,1,2,4) \{$
¿dimensión?

$$\begin{pmatrix} 1. & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$F_2 = F_2 - F_1$
$F_3 = F_3 + F_1$
$F_4 = F_4 - 2F_1$

Solo 2 ind

> Lineal m. depend

$Dim(\cancel{W}) : 2$

3/ En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, base $B \} (1,-1,0), (1,1,0)(0,0,2) \{$ con el vector $v = (4,4,4)$

$(4,4,4) = \alpha(1,-1,0) + \beta(1,1,0) + \gamma(0,0,2)$

$\alpha + \beta = 4$

$-\alpha + \beta = 4$

$\boxed{\gamma = 4}$

$\beta = 4 + \alpha$

$\alpha + 4 + \alpha : 4 ; \; 2\alpha = 0$

$\boxed{\alpha = 0}$

5/ $p(x) = 2 + 3x - 2x^2 + 4x$ en $B = (x^4, x^3, x^2, x, 1)$ en $(\mathbb{R}_4[x], +, \cdot)$

$p(x) = 2, 3x + 2x^2 + 4x^2 = \alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \sigma + \lambda 1$

$\alpha = 4, \beta = 0, \gamma = -2, \lambda = 2$

7/ Ecuación vectorial

Si $Rg(A) \neq Rg(A|B) \Rightarrow$ Incomp y $E = \emptyset$

✩ Subespacios vectoriales

1) $W = \{(\alpha, 0, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es subesp. del espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Sí, ya que tiene 3 elementos y es $\mathbb{R}^3$

$\lambda v + w \cdot \mu = \lambda(\alpha, 0, \beta) + \mu(\alpha, 0, \beta) =$

$= (\lambda\alpha + \mu\alpha, 0, \lambda\beta + \mu\beta)$

- Sea $W \subseteq V, W \neq 0$

W es subesp si:

$\forall v, w \in W, v + w \in W$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in W, \lambda \cdot v \in W$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v, w \in W, v \cdot \lambda + w \cdot \mu$

1- V es subesp de sí mismo

2- $W = \{(\alpha, \alpha) / \alpha \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de espacio $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

3- El $v = (0, 0, 0)$ pertenece a todo W

2) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 0\}$

$\lambda \cdot v + \mu \cdot w = \lambda(x, y, z) + \mu(x, y, z) = (\lambda x + \mu x, \lambda y + \mu y, \lambda z + \mu z)$

$= (\lambda x + \mu x) - (\lambda y + \mu y) + 2(\lambda z + \mu z) = \lambda(x - y + 2z) + \mu(x - y + 2z) = 0$

$\lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$

3) $W = \{(\alpha, 2, \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R})\}$

No pq $(\alpha, 2, \beta)$ no cumple que $(0, 0, 0)$

4) $W = \{(\alpha, \alpha^2) / \alpha \in \mathbb{R})$

No pq, se cumple $(0,0) \in W$ pero no $\forall v, w \in W, v + w \in W$

Se supone $(2,3)$ y $(1,17)$, $\forall v, w \in W, v + w \in W$

$(3, 20) \notin W$ ya que $3^2 \neq 20$

✧ Variedades vectoriales

$v \in V$ un vector y $W \subseteq V$ un subespacio.
Será una variedad vectorial

$$E = v + W = \} v + w / w \in W \{$$

- Dos variedades son iguales si $v_1 - v_2 \in W$

1) $W = \} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + 2z = 3 \{$. No py

$(0,0,0) \notin E$; $0 - 0 + 2 \cdot 0 \neq 3$

2) $E = \} (\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

$E = \} (\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{ = (0,0,1) + (\alpha, \beta, \alpha + \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R})$

3) ¿Es $E = \} (3 + \alpha + \beta, 5 + 3\alpha + \beta, 6 + 4\alpha + \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{$ es subespacio de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

↳ $= (3, 5, 6) + (\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 4\alpha + \beta)$

$\alpha + \beta = 3$; $\beta = 3 - \alpha$; $\beta = 2$

$3\alpha + \beta = 5$; $3\alpha + 3 - \alpha = 5$; $\alpha = 1$

$4\alpha + \beta = 6$

por lo que $(3,5,6) \in W$

4) $E = \} (3 + \alpha + \beta, 5 + 3\alpha + \beta, 7 + 4\alpha + \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{$

↳ $(3,5,7) + (\alpha + \beta, 3\alpha + \beta, 4\alpha + \beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$

$\alpha + \beta = 3$; $\beta = 3 - \alpha$; $\beta = 2$

$3\alpha + \beta = 5$; $3\alpha - \alpha + 3 = 5$; $\alpha = 1$

$4\alpha + \beta = 7$

NO tiene sol

$(3,5,7) \notin W$

Rango de una matriz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

W de $\mathbb{R}^3$ $S = \{(1,2,1), (2,4,2), (-1,-2 -1), (3,6,3)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & 6 & 3 \end{array} \quad L.D = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{array}$$

~~$F_2 = F_2 + 2F_1$~~

$F_4 = F_4 - F_2 + F_1$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{array}$$

F_3:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$F_2 = F_2 - F_1 + F_3$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$V = (-10, 5, 2)$

$W = \} (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; \} \begin{matrix} x + 2y + 9z = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{matrix} \{$

$-10 + 10 - 9$

$(7, 9, 3) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(2, 3, 0) + \mu(0, 3, 0)$

$\alpha + 2\beta = 7$

$3\beta + 3\mu = 9$

$\alpha = 3$

$3 + 2\beta = 7. \quad \beta = 2$

$\mu = 1$

$(8, 14, 13) = \alpha(1, 1, 2) + \beta(2, 4, 3)$

$\alpha + \beta = 8$

$\alpha + 4\beta = 14$

$2\alpha + 3\beta = 13$

$\alpha = 8 - 2\beta$

$8 - 2\beta + 4\beta = 14; \quad 2\beta = 6; \quad \beta = 3$

$\alpha = 8 - 6 = 2$

$4 + 9 = 13$

1) Dim de $S = \}(2,5,6),(3,3,4),(2,2,5),(-1,4,-3)\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3 = F_3 + F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2 = F_2 - F_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 = F_4 + F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow F_1 = F_1 - F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} F_1 = F_1 - F_4 \begin{pmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F]{}$$

3) Dim $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$

$$W = \Big\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x - y + 3z - t = 0 \\ y - z + t = 0 \end{array} \right\}$$

Dim(W) = Dim(V) - nºec. indp

$$\begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ 0 - 2y + 2z - 2t = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \Rightarrow \text{Incógnitas - ecuaciones = parámetros}$$

$4 - 2 = ②$

$z = \alpha ; t = \beta \quad y = \alpha - \beta$

$x = \cancel{\beta} + \beta - \alpha - \beta = -2\alpha$

$W = \}(-2\alpha, \alpha - \beta, \alpha, \beta)\{ / \alpha, \beta \in \mathbb{R}\{ =$

$= \}\alpha(-2,1,1,0) + \beta(0,-1,0,1)\{$

$S = \}(-2,1,1,0),(0,-1,0,1)\{.$ Hay Dos vectores, Dim $W = 2$

1/ Estudio dimensión

$$E = \} (2 - 2\alpha - 4\beta, 1 + \alpha + 2\beta, 1 + \alpha + 2\beta, 6 + \alpha + 2\beta) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{$$

$$E = (2, 1, 1, 6), \{ \alpha (-2, 1, 1, 1), (-4, 2, 2, 2) / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \{$$

$$W = < (-2, 1, 1, 1), (-4, 2, 2, 2)$$

✓

LD; $W = < (-2, 1, 1, 1)$, $\mathrm{Dim}(W) = 1 = \mathrm{Dim}(E)$

$$E = \} (2 - 2\alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha, 1 + \alpha) / \alpha \in \mathbb{R} \{$$

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 - 2\alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 + \alpha \\ t = 6 + \alpha \end{array} \right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{Dim}(\overset{1}{E}) = \mathrm{Dim}(\overset{4}{V}) - \text{nº incog}$$

nº incog = 3

$$-x + 2 = 2\alpha$$
$$y = 1 \pm \alpha$$
$$z - 1 = \alpha$$
$$t - 6 = \alpha$$

$$-x + 2 = 2(1 + \alpha)$$
$$y - 1 = z - 1$$
$$y - 1 = t - 6$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 4 \\ y - z = 0 \\ y - t = -5 \end{array}$$

2) $E = \} (1 + \alpha + (a - 1)\beta + 2\gamma, 2 + \alpha + a\beta + \gamma + (a + 1)\beta, 2 + a\alpha + (a + 1)\beta) / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

$$E = \} (1, 2, 2, 2) + \alpha (1, 1, a, a), ((a - 1), a, (a + 1), a + 1)], \gamma (2, 1, 0, 0)$$

Principio de multiplicación

4/ Menú 3 platos. 4 primeros, 5 segundos y 3 platos. Si no dependen entre ellos, cuántas posibilidades hay?

$4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$

5/ 4 huecos, A, E, R, S, N, P, 1ª vocal sí o sí

$\underbrace{2}_{\text{Pos voc}} \cdot \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 3}_{\text{huecos restants}}$

6/ 2 menús

1- 3 1^os, 2 2^os y 2 3^os

2- 1·1^os 1^os 2 3^os

$3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$1 \cdot 1 \cdot 2 = 2$

$\Big\}\ 14$

Variaciones con repeticion

"Varación de m elementos tomados de n en n" $VR_{m,n} = m^n$

7/ Quiniela de 15 (1 o X o 2) → 3 elecciones 15 veces

$3^{15} = 14.348.907$

8/ números de 4 cifras con los num del 1 al 9 incluidos

$\overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9}$ $\quad 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^4 = 6561$

Variaciones

$$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A^n$

9/ números de 4 cifras con num 1 al 9 sin REPETIRSE

$\overline{9}\ \overline{8}\ \overline{7}\ \overline{6}$ $\quad 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

$V_{9,4} = \frac{9!}{(9-4)!} = 3024$

10/ 50 participantes. Todos muy parejos ¿cómo se reparten las medallas?

$\frac{1^\circ}{50}\ \frac{2^\circ}{49}\ \frac{3^\circ}{48}$ $\quad 50 \cdot 49 \cdot 48 = 117600$ podios posibles

$V_{50,3} = \frac{50!}{(50-3)!} = 117600$

Combinatoria: formas de agrupar elementos

✧ Recuentos básicos (aplicación biyectiva)

1/ Números entre $\overset{m}{5}$ y $\overset{n}{29}$ incluidos

$f(5) = 1$; $f(6) = 2$; $f(x) = x - 4$; $\boxed{f(29) = 25}$

Si $(m < n) \Rightarrow n - m + 1$

2/ Múltiplos de 7 entre 39 y 157

Probar

$$\left.\begin{array}{l} 42 = 7 \cdot 6 \\ 154 = 7 \cdot 22 \end{array}\right\} 22 - 6 + 1 = 17 \text{ múltiplos}$$

$$\frac{154 - 42}{7} + 1 = 17$$

Propiedades de los cardinales

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ($|A| + |B|$ si son disjuntos)
- $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

3/ nº N^*, menores o iguales que 10.000 son divisibles o por 3 o 5

$A = \}n \in \mathbb{N}^* / n \leq 10000, 3|n\{$ y $B = \{n \in \mathbb{N}^* / n \leq 10000, 5|n\}$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Probar

↳ Divisibles por 15; $A \cap B = \{n \in \mathbb{N}^* / n \leq 10000, 15|n\}$

$3 = 3 \cdot 1$

$9999 = 3333 \cdot 3$

$n = 3333 - 1 + 1 = 3333$

$5 = 5 \cdot 1$

$10000 = 2000 \cdot 5$

$n = 2000 - 1 + 1 = 2000$

$15 = 15 \cdot 1$

$9990 = 666 \cdot 15$

$n = 666 - 1 + 1 = 666$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3333 + 2000 - 666 = 4667$

b) Divisible por 3 y no por 5

$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 3333 - 666 = 2667$

$VR_{m,n} = m^{n}$ -> repeticiones
↳ opciones

$\overline{9}\ \ \overline{9}\ \ \overline{9} \to 9^{3}$ $\quad VR_{9,3}$

$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$ $(n \leq m)$ $\quad \overline{9}\ \ \overline{8}\ \ \overline{7} \nearrow V_{9,3} = \frac{9!}{(9-3)!}$

$P_m = m!$ $\quad \overline{3}\ \ \overline{2}\ \ \overline{1} \nearrow P_3 = 3!$

$PR_{m}^{m_1, m_2, m_k} = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2!\, m_k!}$

$C_{m,n} =$

5elecc

3opc

5/ a)

$\underset{6}{\underset{\vee}{\_\ \_\ \_\ \_}} \qquad \underset{7}{\underset{\vee}{\_\ \_\ \_}}$

$C_{6,4} \cdot C_{7,3}$

16/ Quinielas, 49 números y elige 6

$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{49!}{6!\,(43!} = \dots$

~ Combinaciones con ~
~ repeticiones ~

17/ 9 tipos y elige 4

repite, hay de más...

$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n}$

$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \overset{\nearrow 12}{\binom{9+4-1}{4}} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!\ 8!} = 495$

18/ 5 dados, 6 caras

$CR_{m,n} = \binom{m+n-1}{n} = \binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = 252$

~ Permutaciones ~

11) 1 al 9, 9 huecos

$\underline{\ }_9\ \underline{\ }_8\ \underline{\ }_7\ \underline{\ }_6\ \underline{\ }_5\ \underline{\ }_4\ \underline{\ }_3\ \underline{\ }_2\ \underline{\ }_1 = 9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 9! = 362880$

12) 10 libros diferentes, ¿de cuántas formas se pueden colocar?

$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 10! = 3628800$ $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in A^m$

$P_m = m!$ "forma de ordenar m elementos en una fila"

~ Permutaciones con repetición ~

$$PR_m^{m_1, m_2, m_k} = \frac{m!}{m_1!\cdot m_2!\cdot m_3!}$$

13) 3 mates, 4 de lengua, 3 sociales. ¿Formas de colocarlos?

Todos, rep, imp orden

$$\frac{10!}{3!\cdot4!\cdot3!} = 4200 \text{ maneras}$$

~ Combinaciones ~

$$\frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{m}{n}$$

14) 5 ingredientes, solo usa 3

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n!)}}{n!} = \binom{m}{n}$$ $m = 5$ $n = 3$

$$\frac{5!}{3!(5-3)!} = 10$$

15) a) 10 elementos, 5 subconjuntos

$C_{m,n} = \binom{m}{n}$ $m = 10$ $n = 5$ $\frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$

b) 10 elementos, 6 subconjuntos

$C_{m,n} = \binom{m}{n}$ $m = 10$ $n = 6$ $\frac{10!}{5!\cdot4!} = 210$

7) $aRb \iff a^2+a=b^2+b$

Reflex ya que $a^2+a=a^2+a$

Simet ya que $a^2+a=b^2+b \iff b^2+b=a^2+a$

Trans ya que $a^2+a=b^2+b$; $b^2+b=c^2+c$; $a^2+a=c^2+c$

$[a]=\}x\in\mathbb{R}-\}-1/2\{/xRa\{$

~~$a^2+a=1^2+1$~~

~~$a^2+a=2$; a^2+a-2~~

$a^2+a=b^2+b$; b^2+b-a^2-a

$\frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-a^2-a)}}{2}$; $\frac{-1\pm\sqrt{4a^2+4}}{2}$;

$\frac{-1\pm(2a+1)}{2}$,

4/ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x|$

a) ¿Es aplicación? ¿$\forall a \in A, \exists! \, b \in B / f(a) = B$?

Sí, todo real tiene sol real ($\mathbb{R}$)

b) $\mathrm{Im}(f)$ $\mathrm{Im}(f) = \} f(x) / x \in \mathbb{R} \} \rightarrow [0, \infty)$

$f([-3,3]$ $\mathrm{Im}(f) = \{ f(x) / x \in [-3,3] \{ = [0,3$

↳

c) Tipo de aplicación

Inyectiva

$\forall a, a' \in A, \ a \neq a'$ $f(a) \neq f(a')$

No porque $3 \neq -3$ pero $f(3) = f(-3)$

Sobreyectiva

$\forall b \in B, \exists a \in B / f(a) = b$

No hay $f(a)$ para $b < 0$

5/ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $f(x) = (x^2, 1), \forall x \in \mathbb{R}$

a) ¿APP? Si porq todo real^2 = real

b) $\mathrm{Im}(f)$ y tipo app

Inyectiva

$\forall a, a' \in A, \ a \neq a', f(a) \neq f(a')$

$-2 \neq 2$ pero $f(2) = f(-2)$; No

Sobreyectiva

$\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$ $\mathrm{Img}(f) = [0, \infty) \times \} 1 \{$

No pq - no tienen img

c) $f^{-1} \} (1,1), (1,2) \{$

↳ No pq no lama valor asoc a 1

pa esto con

$x = -1$ o 1

Rel preorden $\rightarrow$ R, T

Rel orden $\rightarrow$ R, A, T

Rel equiv $\rightarrow$ R, S, T

$A/R = \{[a] / a \in A\}$

1/ Rel de orden si:

R, A, T

2/ En $\mathbb{Z}$, $a R b \Leftrightarrow a \geq b-$

a) Antisimétrica? No ya que $2 R 1$ y $1 R 2$

b) Reflexiva? ✓ $a \geq a - 2$ $(a R a)$

c) Simétrica $a \geq b - 2$ pero no será nunca $b \geq a-2$

Funciones

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

Inyectiva

$\forall a, a' \in A, a \neq a', f(a) \neq f(a')$

Sobreyectiva

$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$

$\cap$ $x \in \mathcal{U} / x \in A$ y $x \in$

$\cup$ $x \in \mathcal{U} / x \in A$ o $x \in B$

Rel equiva

Simet $a R b$ $b R a$

Reflexiva $a R a$

Transitiva $a R b$ $b R c$ $a R c$

Biyectiva

$\forall b \in B, \exists! a \in A / f(a) = b$

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

$\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ $f(x,y) = x+y$

$\forall (x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}, \exists! z \in \mathbb{Z} / f(x,y) = z$

Función /aplicacció

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

Tipo App

- Inyectiva
  - $\forall a, a' \in A, a \neq a', f(a) \neq f(a')$
- Sobreyectiva
  - $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$; Sacar Dom

Si me pides imagen ⟹ Dónde hay imagen

Relacciones binarias

- Reflexiva aRa
- Simétrica aRb y bRa
- Antisimétrica aRb y bRa $a=b$
- Transitiva aRb, $bRc \Rightarrow aRc$

1) $aRb \iff a + 1/a = b + 1/b$

1- Reflexiva aRa ; $a + 1/a = a + 1/a$ ✓

2- Simétria aRb y bRa ; $a + 1/a = b + 1/b \iff b + 1/b = a + 1/a$

3- Transitva aRb, bRc $a + 1/a = b + 1/b$

$b + 1/b = c + 1/c$; $a + 1/a = 1/c + c$ ✓

Conjunto cociente mult de 7; → 7 elementos

Clases $a \in \mathbb{R}$ $[a] = \{x \in \mathbb{R} / xRa\}$

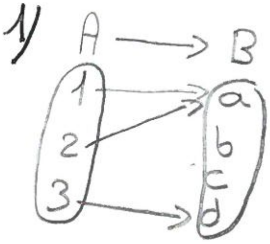
$[1] = \{x \in \mathbb{R} / xR1\}$ $[2] = \{x \in \mathbb{R} / xR2\}$

$1 + 1/x = 1 + 1/1 ; x = 1, 1/1$ $1 + 1/x = 1 + 1/2 < \begin{smallmatrix} 2 \\ 1/2 \end{smallmatrix}$

✧ Imágenes

$Im(f) = \}f(a)/a \in A\{$

$f(C) \subseteq B \Rightarrow Imf \subseteq B$

1/ 

$Im(f) = \}f(a)/a \in A\} \Rightarrow Im(f) \Rightarrow \}f(1), f(2), f(3)\} =$
$= \}a, d\{$

✧ AntiImages

$f^{-1}(D) = \}a \in D/ f(a) \in D\{$

- Tipos de aplicaciones

→ Inyectiva (Solo llega 1 flecha)

$\forall a, a' \in A,\ a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$

1/ $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = 2x+3$

$2x+3 = 2x'+3;\ 2x = 2x';\ x = x^2$ ✓✓ Inyectiva

→ Sobreyectiva

$\forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$

→ Biyectiva

$\forall b \in B, \exists!\, a \in A, f(a) = B$

✧ Particiones de un conjunto

$\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{U}$

$\mathcal{U} = \{0,1,2,3,4,5\}$

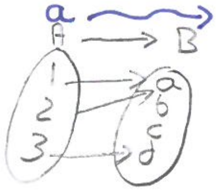
$\mathcal{U} = \} A_1, A_2 \{$, donde $A_1 = \} 1,0,2,3 \{$ y $A_2 = \} 4,5 \{$

✧ Aplicaciones

Correspondencia de A en B

$f: A \longrightarrow B$

$a \rightsquigarrow f(a) = b$



$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

$\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

A -> conjunto inicial

B -> conjunto final

1) $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = 2x$

2) $f: \mathbb{R} - \}0\{ = \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$

Es función y aplicación ya que $\forall a \in \mathbb{R} - \}0\{, \exists! y \in \mathbb{R} / f(x) =$

3) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \log x \nearrow$

$1 \to 0$

$0'7 \to \ldots$

$0 \to \times$

$(0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = \log x$

$\forall x \in (0,\infty), \exists! y \in \mathbb{R} / f(x) = y$

4) $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \to 1, 2 \ldots$

$f(x) = x - 2$ $\quad$ No es aplicación ya que $f(1) \neq \exists!$

1ª Sol -> $f(x) = x + 2$, ya es

2ª Sol -> $f: [2, \infty] \longrightarrow \mathbb{N}$, $\forall x \in [2,\infty), \exists! y \in \mathbb{N} / f(x) = y$

3ª Sol -> $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

5) $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$f(x,y) = x + y$

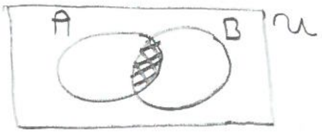
Sí es aplicación ya que una suma de dos naturales siempre será un entero

$\forall (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \exists! z \in \mathbb{Z} / f(x,y) = z$

- Operaciones con conjuntos

→ Intersección $(A \cap B)$

$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \boxed{y} x \in B\}$

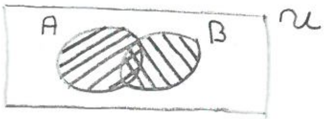


$B \subseteq A;\ A \cap B = B$

- $A \cap B$ disjuntos $= \emptyset$

→ Unión $(A \cup B)$

$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A \boxed{o} x \in B\}$



$B \subseteq A;\ B \cup A = A$

- Propiedades de la intersección y la unión

1- Idempotente $\forall A \subseteq \mathcal{U},\ A \cap A = A\ ;\ A \cup A = A$

2- Conmutativa $\forall A, B \subseteq \mathcal{U},\ A \cap B = B \cap A\ ;\ A \cup B = B \cup A$

3- Asociativa $\forall A, B, C \subseteq \mathcal{U},\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C\ ;\ A \cup (B \cup C) = (A \cup$

4- Absorción $\forall A, B \subseteq \mathcal{U},\ A \cap (A \cup B) = A\ ;\ A \cup (A \cap B) = A$

5- Distributiva $\forall A, B, C \subseteq \mathcal{U},\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

6- Elemento neutro $\forall A \subseteq \mathcal{U},\ A \cap \emptyset = A;\ A \cup \emptyset = A$

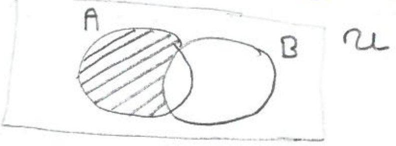
7- Elemento universal $\exists \mathcal{U} / \forall A \subseteq \mathcal{U},\ A \cap \mathcal{U} = A\ ;\ A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$

8- Elemento complementario $\forall A \subseteq \mathcal{U}, \forall A' \subseteq \mathcal{U},\ A \cap A' = \emptyset\ ;\ A \cup A' = \mathcal{U}$

9- Leyes de De Morgan $\forall A, B \subseteq \mathcal{U},\ (A \cap B)' = A' \cup B'\ ;\ (A \cup B)' = A' \cap B'$

→ Diferencia

$A - B = \{x \in \mathcal{U} / x \in A\ y\ x \notin B\}$



$A - B = A \cap B'$

- Producto cartesiano

$A \times B = \{(a,b) / a \in A, b \in B\}$

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\{a,b\} = \{b,a\}$

$(a,b) \neq (b,a)$

Álgebra

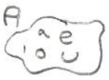
Tema 1

✧ Conjuntos, formados por elementos

$a \in A$; "a" pertenece a "A"

$a \notin A$; "a" no pertenece a "A"

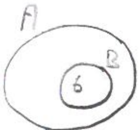
- ¿Formas de conocer los elementos?
  1- Por extensión, $A = \{a, b, c \ldots\}$
  2- Por comprensión, con características; $A = \{x / x$ es una letra vocal.$\}$
- Diagramas de Venn



- Conjuntos numéricos
  $\mathbb{N} \rightarrow$ Naturales
  $\mathbb{Z} \rightarrow$ Enteros
  $\mathbb{Q} \rightarrow$ Racionales
  $\mathbb{C} \rightarrow$ Complejos
  $\mathbb{R} \rightarrow$ Reales
- Cardinal: Cantidad de elementos del conjunto

✧ Subconjuntos (A y B)

$\forall b \in B \Rightarrow b \in A$



$B \subseteq A$; "B" está contenido en "A"

$B \nsubseteq A$; "B" no está contenido en "A"

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

- Subconjunto impropio: él mismo
- Conjunto vacío $\emptyset$
- Conjuntos iguales: $A = B \Rightarrow A \subseteq B \Longleftrightarrow B \subseteq A$
- Conjunto universal $\mathcal{U}$
- Conjunto complementario $A' \Rightarrow A'_{\mathcal{U}} = \{x \in \mathcal{U} / x \in A\}$

✧ Partes de un conjunto $\mathcal{P}(A)$

$$\mathcal{P}(A) = \{B / B \subseteq A\} \longrightarrow B \in \mathcal{P}(A) \Longleftrightarrow B \subseteq A$$

1/ $A = \{a, b\}$ $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{b\}, \emptyset, A\}$

$\{a\} \in \mathcal{P}(A)$ $\{a\} \subseteq A$

$\{\{a\}, \{b\}, \emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(A)$

Intersección $A \cap B = \{ x \in \mathcal{U} / x \in A \text{ y } x \in B \}$

Unión $A \cup B = \} x \in \mathcal{U} / x \in A \text{ o } x \in B \{$

Diferencia $A - B = \} x \in \mathcal{U} / x \in A \text{ y } x \notin B \{$

Absorción $\forall A, B, C \in \mathcal{U} \quad A \cap (B \cup C) = A$

Asociativa $\forall A, B, C \in \mathcal{U} \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Aplicación $\forall a \in A, \exists! b \in B / f(a) = b$

Imagen $\text{Im}(f) = \} f(a) / a \in A \}$

Antiimagen $f^{-1}(D) = \} a \in A / f(a) \in D \{$

Inyectiva Solo llega 1 a cada imagen

$\forall a, a' \in A, \; a \neq a', \; f(a) \neq f(a')$

Sobreyectiva Todo A tiene un B

$\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b$

Biyectiva

$\forall b \in B. \exists! a \in A / f(a) = b$

Autoevaluación

1) tres veces una moneda

n : veces
m : soluciones

$\overline{2}$ $\overline{2}$ $\overline{2}$

$VR_{m_n} = m^n = 2^3 = 8$

3) $\overbrace{E\ E\ E}^{\text{repite}}\ \overbrace{C\ C}^{\text{repite}}$, 5 huecos

PR

$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$

$3!\ 2!$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

14) $\frac{F}{3}$ $\frac{C}{2}$

F

$\_\ \_\ \_$

5

C

$\_\ \_$

6

c) $1452x \equiv 10 \pmod{10275}$. m.c.d $(10275, 1452) = 3$ y $3 \nmid 10$, por lo que no hay ninguna solucción a este problema

d) $10275x + 1452y = 21$ m.c.d$(10275, 1452) = 3$ y $3 \mid 21$ por lo que si tiene sol

$$\frac{10275}{3}x + \frac{1452}{3}y = 21/3 \;;\; \underbrace{3425x + 484y = 1}_{\text{Bezout}}$$

$x_0 = x + b/d\,k$

$y_0 = y + a/d\,k$

3) m.c.d$(224, 71) = 1$??

m.c.d$(224, 71)$ = m.c.d $(71$

224 | 71
11   3

71 | 11
5   6

11 | 5
1   2

5 | 1
0   5

$224 = 71 \cdot 3 + 11$ $71 = 11 \cdot 6 + 5$ $11 = 5 \cdot 2 + 1$

$11 = 224 - 71 \cdot 3$ $5 = 71 - 11 \cdot 6$ $1 = 11 - 5 \cdot 2$

$1 = 11 - 5 \cdot 2 = 11 - (71 - 11 \cdot 6) \cdot 2 = 11 + 71 \cdot (-2) + 11 \cdot 12 = 71 \cdot (-2) + 11 \cdot 13$

$71 \cdot (-2) + (224 - 71 \cdot 3) \cdot 13 = 71 \cdot (-2) + 224 \cdot 13 + 71 \cdot (-39) = 224 \cdot 13 + 71 \cdot (-91)$

Inv 71 en $\mathbb{Z}_{224}$

3/ a) 30 cartas ✓   50 cartas ✗

$C_{30,4} \cdot C_{50,3} = \frac{30!}{4!(30-4)!} \cdot \frac{50!}{3!(50-3)!} = 537138000$

b/ 3 dados de 12 caras y 5 monedas

$VR_{12,3} \cdot VR_{5,2} = 12^3 \cdot 5^2 = 55296$

c) 3 dados a destiempo.

$12! \cdot 12! \cdot 12!$

4/ m.c.d(15817, 1740) = 1

$m.c.d(15817, 1740) = m.c.d(1740, 157) = m.c.d(157, 13) = m.c.d(13, 1) = 1$

$\begin{array}{l|l} 15817 & 1740 \\ \cline{2-2} 157 & 9 \end{array}$ $\begin{array}{l|l} 1740 & 157 \\ \cline{2-2} 13 & 11 \end{array}$ $\begin{array}{l|l} 157 & 13 \\ \cline{2-2} 1 & 12 \end{array}$ $\begin{array}{l|l} 13 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 13 \end{array}$

$15817 = 1740 \cdot 9 + 157$ $1740 = 157 \cdot 11 + 13$ $157 = 13 \cdot 12 + 1$

$157 = 15817 - 1740 \cdot 9$ $13 = 1740 - 157 \cdot 11$ $1 = 157 - 13 \cdot 12$

$1 = 157 - 13 \cdot 12 = 157 - 13 \cdot (1740 - 157 \cdot 11) = 157 + 157 \cdot 143 - 1740 \cdot 13$

$= 157 \cdot 144 + 1740 \cdot (-13) = (15817 - 1740 \cdot 9) \cdot 144 + 1740 \cdot (-13) =$

$= 15817 \cdot 144 + 1740 - 1296 + 1740(-13) = 15817 \cdot 144 + 1740 \cdot (-1309) = 1$

b) Inverso de 1740

$15817 \cdot 144 + 1740 \cdot (-1309) = 1$

$\hookrightarrow \underbrace{\overline{15817} \cdot \overline{144}}_{0} + \overline{1740} \cdot \overline{(-1309)} = \overline{1}$

$\overline{1740} \cdot \underbrace{\overline{(-1309)}}_{15817 - 1309 = \overline{14508}} = \overline{1}$

m.c.d (79085, 8700) = 5 $\quad\quad 8700x \equiv 10 \pmod{79085}$

y como $5 \mid 10$, tiene Ssol

$$\frac{8700}{5} x \equiv \frac{10}{5} \pmod{79085/5}$$

$$1740 \cdot x \equiv 2 \pmod{15817}$$

$$\underbrace{1740 \cdot 14508}_{1} \cdot x \equiv 2 \cdot 14508 \pmod{15817}$$

$$1x \equiv \overline{29016} - 15817 = \overline{13199}$$

$$x = 13199 + 15817k, \; k \in \mathbb{Z}$$

3/ a) 15v ⇒ 8 $\quad\quad$ 20x ⇒ 10

$$C_{15,8} \cdot C_{20,10} = \frac{15!}{8! \cdot (15-8)!} \cdot \frac{20!}{10! \cdot (20-10)!} = 11'88....$$

b) 15 buenos $\quad$ 1 jefe $\quad$ 1 subjefe $\quad$ 6 luchadores

8 total

$$C_{15,1} \cdot C_{14,1} \cdot C_{13,6} = 357840$$

4/ a) m.c.d (10275, 1452) = 3

m.c.d (10275, 1452) = m.c.d (1452, 111)

$10275 \,\underline{|\, 1452}$ $\quad$ $1452 \,\underline{|\, 111}$ $\quad$ $111 \,\underline{|\, 9}$ $\quad$ $9 \,\underline{|\, 3}$

$111 \quad 7$ $\quad\quad$ $9 \quad 13$ $\quad\quad$ $3 \quad 12$ $\quad\quad$ $0 \quad 3$

$10275 = 1452 \cdot 7 + 111$ $\quad$ $1452 = 111 \cdot 13 + 9$ $\quad$ $111 = 9 \cdot 12 + 3$

$111 = 10275 - 1452 \cdot 7$ $\quad$ $9 = 1452 - 111 \cdot 13$ $\quad$ $3 = 111 - 9 \cdot 12$

$$3 = 111 - 9 \cdot 12 = 111 - (1452 - 111 \cdot 13) \cdot 12 = 111 + 1452 \cdot (-12) + 111 + 156 =$$

$$= 1452 \cdot (-12) + 111 \cdot 157 = 1452 \cdot (-12) + (10275 - 1452 \cdot 7) \cdot 157 = 1452 \cdot (-12) +$$

$$= 1452 \cdot (-12) + 10275 \cdot 157 + 1452 \cdot -1098$$

7/ Estudiar si $30990 \mathcal{R} 10101$ en $\mathbb{Z}_9$ ($\overline{30990} = \overline{10101}$ en $\mathbb{Z}_9$)

$30990 \,\underline{|\, 9}$ — 3, 3443

$10101 \,\underline{|\, 9}$ — 3, 1122

$\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}\}$

$= \bar{3} \quad \bar{3} =$

7/ $-2091 \mathcal{R} 1211 \Leftrightarrow \overline{2091} = \overline{1211}$ en $\mathbb{Z}_9$

$-2091 \,\underline{|\, 9}$ — 3, 232

$1211 \,\underline{|\, 9}$ — 5, 134

$2091 = 9 \cdot 232 + 3$

NO $5 \neq 6$

$-2091 + 9 \cdot (-232) - 3$

$-2091 = \underbrace{9 \cdot (-232) - 9}\ \underbrace{+ 9 - 3}$

$-2091 = 9 \cdot (-233) + 6$

7/ Inversos de $\mathbb{Z}_9 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

$\bar{a} \cdot ? = \bar{1} \Rightarrow$ Si m.c.d $(a, 9) = 1$

m.c.d$(0, 9) = 0$

$(1, 9) = 1$

$(2, 9) = 1$

$(3, 9) = 3$

$(4, 9) = 1$

$(5, 9) = 1$

$(6, 9) = 3$

$(7, 9) = 1$

$(8, 9) = 1$

Tienen $= (\bar{1}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{8})$

7/ Divisores de 0 en $\mathbb{Z}_9$: aquellos que no tienen inverso

$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{0}$

$\bar{3} \cdot \bar{6} = \overline{18} = \bar{0}$

$\bar{3} \cdot \bar{9} = \bar{9} = 0$

7/ En $\mathbb{Z}_6$ se verifica $\quad \mathbb{Z}_6 \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$

$6 = 12 = 18 = 24$

$= 8 = 14$

$= 9 = 15 = 21 = 27$

$= 11 = 17$

a) $\bar{5} = \overline{18}$ ×   b) $\overline{22} = \bar{6}$ ×   c) $\overline{10} = \bar{2}$ ×   d) $\overline{27} = \overline{15}$ ✓

7/ En $\mathbb{Z}_{60}$, no tiene inverso:

a) $\bar{7}$ $\quad \bar{7} \cdot ? = 1 \quad$ m.c.d$(7, 60) = 1$ ✓

b) $\overline{45}$ $\quad \overline{45} \cdot ? = 1 \quad$ m.c.d$(45, 60) = 5 \Leftarrow$

c) $\overline{49}$ $\quad \overline{49} \cdot ? = 1 \quad$ m.c.d$(49, 60) = 1$ ✓

d) $\overline{11}$ $\quad \overline{11} \cdot ? = 1 \quad$ m.c.d$(11, 60) = 1$ ✓

m.c.d(72 384, 9234) = 6

%2 ↓

36192, 4617

%3 ↓

12064 , 1539

$12064 \,\underline{|1539}$
1291 7

$1539 \,\underline{|1291}$
248 1

$1291 \,\underline{|248}$
51 5

$248 \,\underline{|51}$
44 4

$51 \,\underline{|44}$
7 1

$44 \,\underline{|7}$
2 6

$7 \,\underline{|2}$
1 3

$2 \,\underline{|1}$
0 2

2/ $3254 \,\underline{|27}$
14 120

$3254 = 27 \cdot 120 + 14$

$-3254 = 27 \cdot -120 - 14$

$-3254 = 27 \cdot \underbrace{(-120) - 27}_{} \underbrace{+ 27 - 14}_{}$

$-3254 = 27 \cdot (-121) + 13$

6/ ¿Cuál ec. diofántica no tiene sol?

a) $6x + 8y = 5$ ⇐
m.c.d$(6,8) = 2$ y $2 \nmid 5$

b) $9x + 12y = 15$
m.c.d$(9,12) = 3$ y $3 | 15$

c) $4x + 6y = 28$
m.c.d$(4,6) = 2$ y $2 | 28$

d) $3x + 5y = 6$
m.c.d$(3,5) = 1$ y $1 | 5$

Inveso $\bar{4}$ en $\mathbb{Z}_9$

$\{0,1,\bar{2},\ldots 8\}$ $10 = 19 = 28$

$\bar{4} \cdot \bar{?} = \bar{1} = \overline{28}$

$\bar{4} \cdot \bar{7} = \bar{1}$

$3x \equiv 5 \pmod{7}$

$mcm(3,7) = 1$

$5^{70} \,\underline{|\,4}$ (mod 4)

$\Rightarrow 1^{720} \,\underline{|\,4}$

$\hookrightarrow 1 \quad 0$

$27 - 4 - 44 - 4 - 4 - 4$

$40 - 3 - 3 - 3 - ? - 3 - 3$

$18^{201} \,\underline{|\,13}$

$\Rightarrow 5^{201} = 13^{201}$

$201 \,\underline{|\,4}$

$\hookrightarrow 1 \quad 50$

$5^0 = 1$

$5^1 = 5$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 = 12$

$5^3 = 5^2 \cdot 5 = 12 \cdot 5 = 60 = 8$

$5^4 = 5^3 = 8 \cdot 5 = 40 = 1$

$201 = 50 \cdot 4 + 1$

$(5^4)^{50+1} = 1^{50+1} = 1^{50} \cdot 5 = 1 \cdot 5 = \boxed{5}$

$5^{8723} \,\underline{|\,9}$

$5^0 = 1$

$5^1 = 5$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 = 7$

$5^3 = 5^2 \cdot 5 = 7 \cdot 5 = 35 = 8$

$5^4 = 5^3 \cdot 5 = 8 \cdot 5 = 40 = 4$

$5^5 = 5^4 \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20 = 2$

$5^6 = 5^5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10 = 1$

$5723 \,\underline{|\,6}$

$\hookrightarrow 5 \quad 953$

$(5^6)^{953+4} = 1^{956} = 1 \cdot \cdot$

4^{6745} entre 3

$4 \doteq 1 \pmod{3}$

$\to = 1^{6745} = 1 \underline{|3} = 1$

$9^{5678} \underline{|9}$

$\to 0$

$0 \underline{|9}$

$0 \quad 0$

$6^{6746} \underline{|3}$

$\to 0 \underline{|3}$

$\circled{0} \; 0$

$x \equiv x^0 + \frac{n}{d} k$

$10x \equiv 15 \pmod{55}$

m.c.d $(10, 55) = 5$ y $5 | 15$

$\frac{10}{5} x \equiv \frac{15}{5} \pmod{55} \Rightarrow 2x \equiv 3 \pmod{11} = \mathbb{Z}_{11}$ $1 = 12$

$\hookrightarrow$ inv

m.c.d $(2, 11) = 1$

$\bar{2} \cdot \bar{6} = 1$

$12x \equiv 3 \cdot 6$; $x_0 \equiv 7$

$x = x_0 + \frac{n}{d} k = 7 + 55/5 \, k$

13) a) $9x \equiv 15 \pmod{24}$

mcd $(9, 24) = 3$ $\quad 3 | 15$

$\frac{9x}{3} \equiv \frac{15}{3} \left(\bmod \frac{24}{3}\right) \Rightarrow 3x \equiv 5 \pmod{8}$ $\quad$ m.c.d $(8, 3) = 1$

$\bar{3} \cdot \bar{3} = \bar{9} = \bar{1}$ $\quad 1 = 9$

$3 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 3 \pmod{8}$

$1x = 15$

$x = x_0 + \frac{n}{d} k$

$x = 15 + \frac{24}{3} k$ (mod 24

~~3) a) m.c.d(545, 255) = 5 Euclides~~ ~~m.c.d(545,255) = m.c.d(255,35) = m.c.d(35,10)~~

~~545 | 255~~
~~35   2~~

~~255 | 35~~
~~10   7~~

~~35 | 10~~
~~5   3~~

~~10 | 5~~
~~0   2~~

~~545 = 255·2+35; 35 = 545−255·2~~

~~255 = 35·7+10~~
~~10 = 255−35·7~~

~~35 = 10·3+5~~
~~5 = 35−10·30~~

~~b) Bezout~~

~~∃x, y ∈ ℤ / 545x + 255y = 5~~

~~B) 5 = 545 ∧ 255 = 2~~

3) a) $m.c.d(17\,814, 1591) = 1$ $m.c.d(x,y) = m.c.d(1591, 313) = m.c.d(313, 26) = m.c.d(26,1) = 1$

17814 | 1591
313   11

1591 | 313
26   5

313 | 26
1   12

26 | 1
0   26

$17814 = 1591 \cdot 11 + 313$
$313 = 17814 - 1591 \cdot 11$

$1591 = 313 \cdot 5 + 26$
$26 = 1591 - 313 \cdot 5$

$313 = 26 \cdot 12 + 1$
$1 = 313 - 26\ 12$

$$1 = 313 - 26 \cdot 12 = 313 - (1591 - 313 \cdot 5) \cdot 12 = 313 - 12 \cdot 1591 + 313 \cdot 60 =$$
$$\Rightarrow 12 \cdot 1591 + 313 \cdot 61 = (17814 - 1591 \cdot 11) \cdot 61 - 12 \cdot 1591 = 17814 \cdot 61 - 1591 \cdot 671 - 12 \cdot 1591 =$$
$$= 17814 \cdot 61 + 1591(-683) = 1$$

$x_0 = 61$ $\quad y_0 = -683$

$x = x_0 + \frac{6}{d} k = 61 + 1591k$
$y = x_0 - \frac{a}{d} K = -683 - 17814k$

b) Tiene inverso 1591?

$17814 \cdot 61 + 1591(-683) \equiv 1$

$\underbrace{\overline{17814} \cdot \overline{61}}_{0 \cdot 61 = 0} + \overline{1591} \cdot \underbrace{(\overline{-683})}_{} \equiv 1$

Inverso $= -683 + 17814 = \overline{17131}$

c) $1591x \equiv 5 \pmod{17814}$

$1591 \cdot 17131x = 5 \cdot 17131$; $x \equiv 8655$ mod ...

$x = 14390$

d) Ecuación sin sol $17814x + 1591y = n \Rightarrow 1 = 0$

$d \mid n$, todo nomes ausible entre 1

2/ Perm con rep $\frac{m!}{m_1! \, m_2! \, m!}$

$P = m!$

$PR = \frac{m!}{n!m! \, m!}$

$VR = m^n$

$V = \frac{m!}{(m-n)!}$

$C = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$CR = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)}$

$\frac{15!}{6! \cdot 5! \cdot 4!} = 630630$ formas

b) $C_{6,3}$ $C_{5,2}$ $C_{4,2}$

$C_{6,3} \cdot C_{5,2} \cdot C_{4,2} = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{5!}{5!(5-2)!} \cdot \frac{4!}{4!(4-2)!}$

c) $5 + 4 + 6! = 15!$

x) $\boxed{A, G}$, C, D, E, F

$P = m!$

$PR = \frac{m!}{m! \cdot m! \cdot m!}$

$VR = m^n$

$V = \frac{m!}{(m-n)!}$

$C = \frac{m!}{n!(m-n)!}$

$CR = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)!}$

2/ $m = 6$ equipos

$n = 2$ juegos

$\frac{6!}{(6-2)!} = 30$

$m = 4$ transportes => puedes repetir

$n = 2$ ir y venir

$4^2 = 16$

8/ 4 num del 0 al 9 y 3 letras de 27 consonantes

$VR_{10,4} \cdot VR_{23,3} =$ ~~$\frac{10!}{(10-4)!} \cdot \frac{23!}{(23-3)!}$~~ $10^4 \cdot 23^3 = 121$m

18/

10) En $\mathbb{Z}_{50}$, es divisor de 0...? Aquel que no tenga inverso

$\overline{25}$ m.c.d (25, 50) = 50 X ⇐

$\overline{9}$ m.c.d (9, 50) = 1 ✓

$\overline{49}$ m.c.d (49, 50) = 1 ✓

$\overline{59} = \overline{9}$ m.c.d (9, 50) = 1 ✓

11) el inverso de $\overline{4}$ en $\mathbb{Z}_9$

$\overline{4} \cdot ? = 1$

m.c.d (4, 9) = 1, sí tiene

x = 10 = 19 = 28 = 36

$\overline{4} \cdot \overline{7} = 28 = 1$ $9x + 4y = 1$

7) $\mathbb{Z}_{12759} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{12758}\}$

¿Inverso 437?

m.c.d (437, 12759) = 1, entonces sí tiene

12759 | 437

86 29

⇓ m.c.d (437, 86) = 1

437 | 86

¿Cuál es el inv de $\overline{437}$?

$12759 \cdot x + 437y = 1$

8) Inverso de 4 en $\mathbb{Z}_{25}$ $\{0, 1, 2, 3, 4, \ldots 24\}$ = 26 = 51 = 76

$\overline{4} \cdot ? = 1$

$\overline{4} \cdot \overline{19} = 1$

9) m.c.d (364, 748) = 4

748 | 364

20 2

364 | 20

4 18

20 | ④ ⇐

0 5

364 | 2

m.c.d (14867, 12654)

$$\begin{array}{r|l} 12654 & 2208 \\ \cline{2-2} 1619 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2208 & 1619 \\ \cline{2-2} 584 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1619 & 584 \\ \cline{2-2} 441 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 584 & 441 \\ \cline{2-2} 148 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 441 & 148 \\ \cline{2-2} 145 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 148 & 145 \\ \cline{2-2} 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 145 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 48 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3 & \textcircled{3} \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$$

m.c.d (345, 97

$$\begin{array}{r|l} 345 & 97 \\ \cline{2-2} 54 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 97 & 54 \\ \cline{2-2} 43 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 43 \\ \cline{2-2} 11 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 43 & 11 \\ \cline{2-2} 10 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 10 \\ \cline{2-2} 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & 1 \\ \cline{2-2} 0 & 10 \end{array}$$

Inv 4 en $\mathbb{Z}_9$ $\{0, 1, 2, \dots 8\}$ 10, 19, 28

$\bar{4} \cdot ? = 1$

$\bar{4} \cdot \bar{7} = 1$

$$\begin{array}{r|l} -3251 & 456 \\ \cline{2-2} 59 & 7 \end{array}$$

$3251 = 456 \cdot 7 + 59$

$-3251 = 456 \cdot (-7) - 59$

$-3251 = 456 \cdot \underbrace{(-7) - 456}_{} + \underbrace{456 - 59}_{}$

$-3251 = 456(-8) + 397$

Ecuación de congruencias

$21x \equiv 15 \pmod{48}$ m.c.d $(21, 48) = 3$

$\frac{21}{3} x \equiv \frac{15}{3} \left(\bmod \frac{48}{3}\right)$

$7x \equiv 5 \pmod{16}$ m.c.d $(16, 7) = 1$

$7 \cdot ? \equiv 5$ $5 = 21$